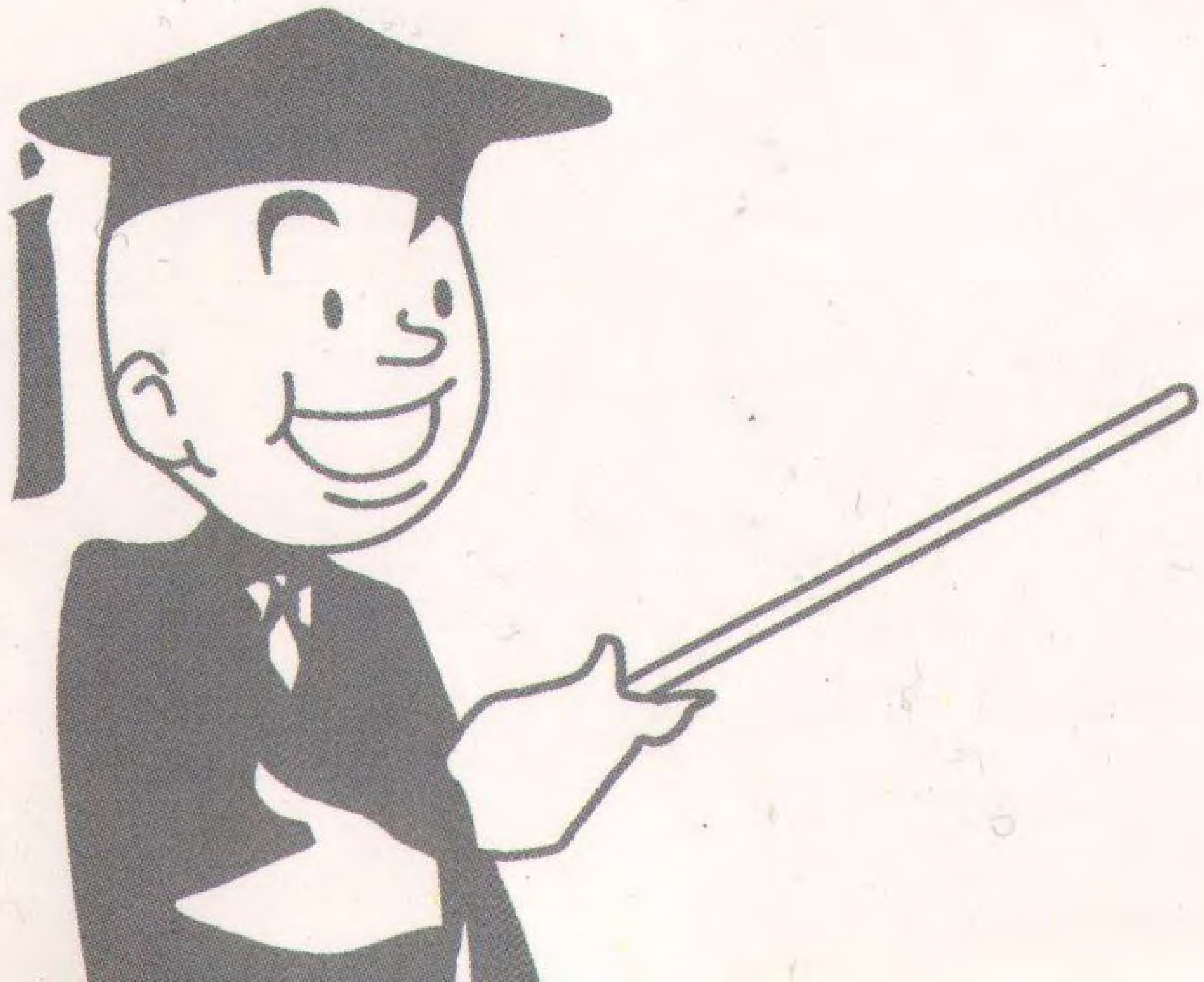
تم بيع أكثر من ٣٠ مليون نسخة من ملخصات شوم!

حساب التفاضل والتكامل

ملخصات شوم
إيزي

- يغطى جميع أساسيات المنهج
- يحتوى على الكثير من المسائل المحلولة حلاً كاملاً
- أفضل وسيلة دقيقة وموجزة لمساعدة الطالب على التفوق والنجاح



مندلسون
وآخرون

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م.
مصر

المحتويات

الفصل الأول :	الدوال ، المتتابعات ، النهايات والاتصال .	5
الفصل الثانى :	التفاضل .	21
الفصل الثالث :	الحد الأقصى والحد الأدنى .	39
الفصل الرابع :	تفاضل الدوال الخاصة .	59
الفصل الخامس :	قانون المتوسط ، الأشكال غير المعينة، المميز ، ورسم المنحنيات .	75
الفصل السادس :	أساسيات الأسلوب التقنى للتكامل وتطبيقاته .	95
الفصل السابع :	التكامل المحدود ، مساحات مستوية بالتكامل التكامل المعتل (الغير صحيح) .	123
ملحق (أ) :	صيغ التفاضل للدوال الرياضية المعروفة .	135
ملحق (ب) :	صيغ التكامل للدوال الرياضية المعروفة .	137
قائمة المصطلحات .		139

كتب أخرى فى
سلسلة ملخصات شوم إيـزى

ملخص شوم إيـزى : الفيـزياء العامـة

ملخص شوم إيـزى : الجبـر العام

ملخص شوم إيـزى : الإحصاء

ملخص شوم إيـزى : البـرمجة بلغة ++C

ملخص شوم إيـزى : الكيـمياء العامـة

ملخص شوم إيـزى : الكيمياء العضويـة

الفصل الأول

الدوال ، المتتابعات ، النهايات والاتصال

Functions, Sequences, Limits, and Continuity

فى هذا الفصل :

- ✔ دالة متغير .
- ✔ الرسم البيانى لدالة .
- ✔ المتتابعة اللانهائية .
- ✔ نهاية متتابعة .
- ✔ نهاية دالة .
- ✔ نهاية الحد الأيمن والحد الأيسر .
- ✔ نظريات النهايات .
- ✔ الاتصال .
- ✔ مسائل محلولة .

• دالة متغير Function of a Variable

الدالة هى قاعدة تتشارك فيها تمامًا كل قيمة للمتغير x فى فئة معينة مع متغير آخر y . يسمى المتغير y فى هذه الحالة متغير غير مستقل ويسمى المتغير x بالمتغير المستقل . والفئة التى يمكن اختيار المتغير

x منها تسمى مجال الدالة . والفئة التى تحتوى على كل قيم y المقابلة للمتغير x تسمى مدى الدالة .

مثال 1-1 : المعادلة $x^2 - y = 10$ و x متغير مستقل تتشارك قيمة واحدة للمتغير y مع كل قيمة للمتغير x . يمكن أن تحسب الدالة من المعادلة $y = x^2 - 10$. المجال هو فئة كل الأعداد الحقيقية . نفس المعادلة $x^2 - y = 10$ ، لو أخذنا المتغير y كمتغير مستقل ، نجد أنه أحيانًا تتشارك قيمتان من x مع كل قيمة للمتغير y . لذلك لابد من تمييز دالتين للمتغير y .

$$x = \sqrt{10+y} \quad \text{و} \quad x = -\sqrt{10+y}$$

Example 1-1: The equation $x^2 - y = 10$, with x the independent variable associates one value of y with each value of x. The function can calculated with the formula $y = x^2 - 10$. The domain is the set of all real numbers. The same equations, $x^2 - y = 10$, with y taken as the independent variable, sometimes associates two values of x with each value y. Thus, we must distinguish two functions of y.

$$x = \sqrt{10+y} \text{ and } x = -\sqrt{10+y}$$

مجال هاتين الدالتين هو فئة لكل قيم y حيث إن $y \geq -10$ ، لأن $\sqrt{10+y}$ ليست عدد حقيقى عند $10 + y < 0$.

لو رمزنا للدالة بالرمز f فسيرمز المصطلح f(b) للقيمة التى نحصل عليها عند تطبيق f على العدد b فى مجال f . غالبًا تعرف الدالة بإعطاء صيغ للمتغير الاختيارى f(x) . ومثال لذلك الصيغة $f(x) = x^2 - 10$ تعطى نفس قيم الدالة فى المثال 1-1 . نفس الدالة فيمكن أن تعرف أيضًا بالمعادلة $y = x^2 - 10$.

مثال 1-2 :

(1) لو $f(x) = x^3 - 4x + 2$

Example 1-2:

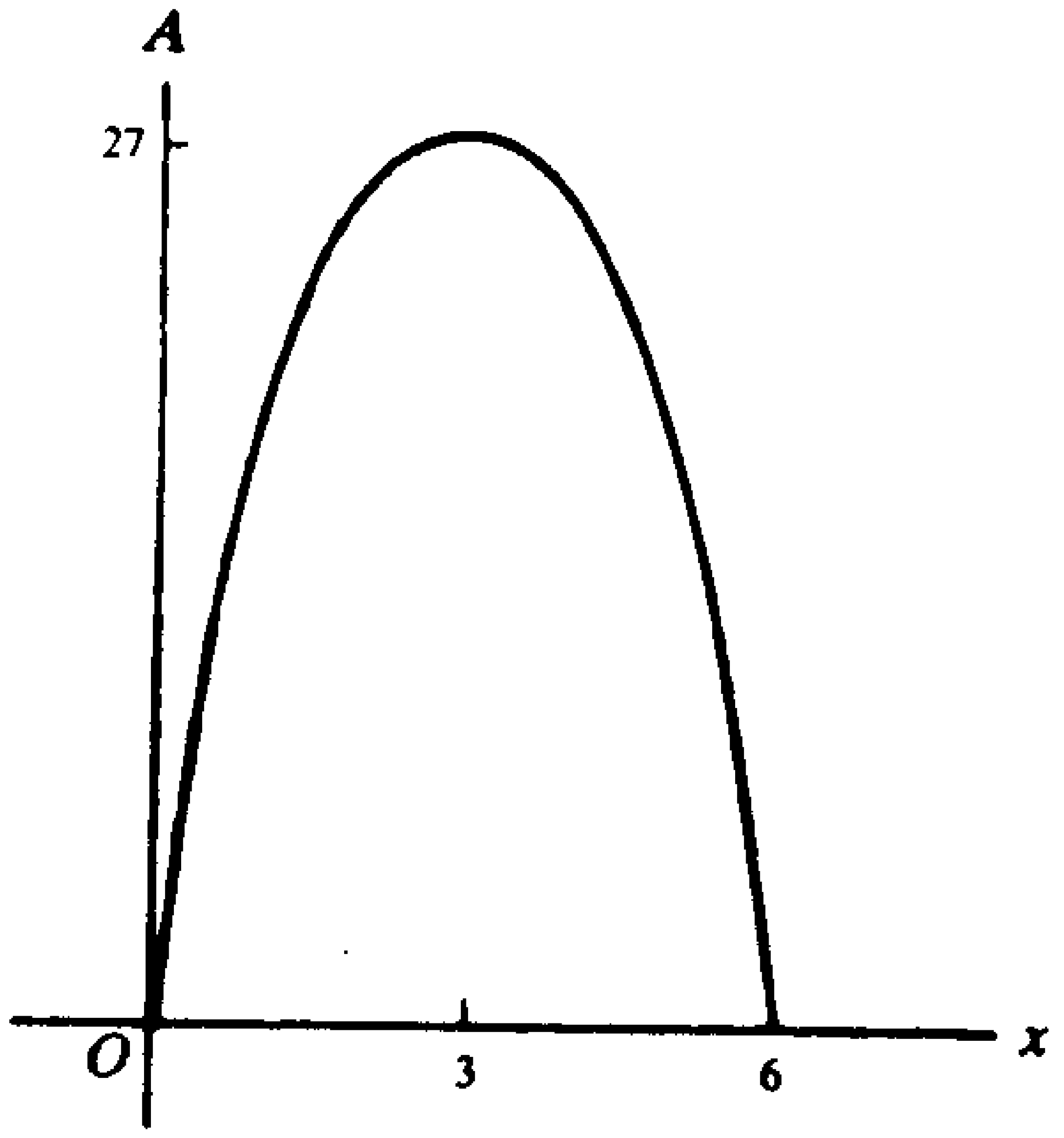
(1) if $f(x) = x^3 - 4x + 2$, then

إذن

$$f(1) = (1)^3 - 4(1) + 2 = 1 - 4 + 2 = -1$$
$$f(-2) = (-2)^3 - 4(-2) + 2 = -8 + 8 + 2 = 2$$
$$f(a) = a^3 - 4a + 2$$

(2) الدالة $f(x) = 18x - 3x^2$ معرفة لكل x بدون استثناء $18x - 3x^2$ هو عدد حقيقى مادام العدد x هو عدد حقيقى ، لذلك مجال الدالة هو فئة كل الأعداد الحقيقية .

(3) A هى مساحة مستطيل معين طول أحد أضلاعه x ومعطاة كالآتى $A = 18x - 3x^2$ فى هذه الحالة كلا من x ، A لابد أن يكونان موجبين وبإكمال المربع نحصل على $A = -3(x - 3)^2 + 27$. ولكى تكون $A > 0$ لابد أن يكون $3(x - 3)^2 < 27$ والذى يحدد قيمة x بأقل من 6 ، أى أن $0 < x < 6$. الدالة التى تحسب A لها فترة مفتوحة $(0, 6)$ وهى مجالها أيضًا . نلاحظ من شكل 1-1 أن مدى الدالة هو الفترة $(0, 27)$.



شكل 1-1

• الرسم البيانى لدالة Graph of a Function

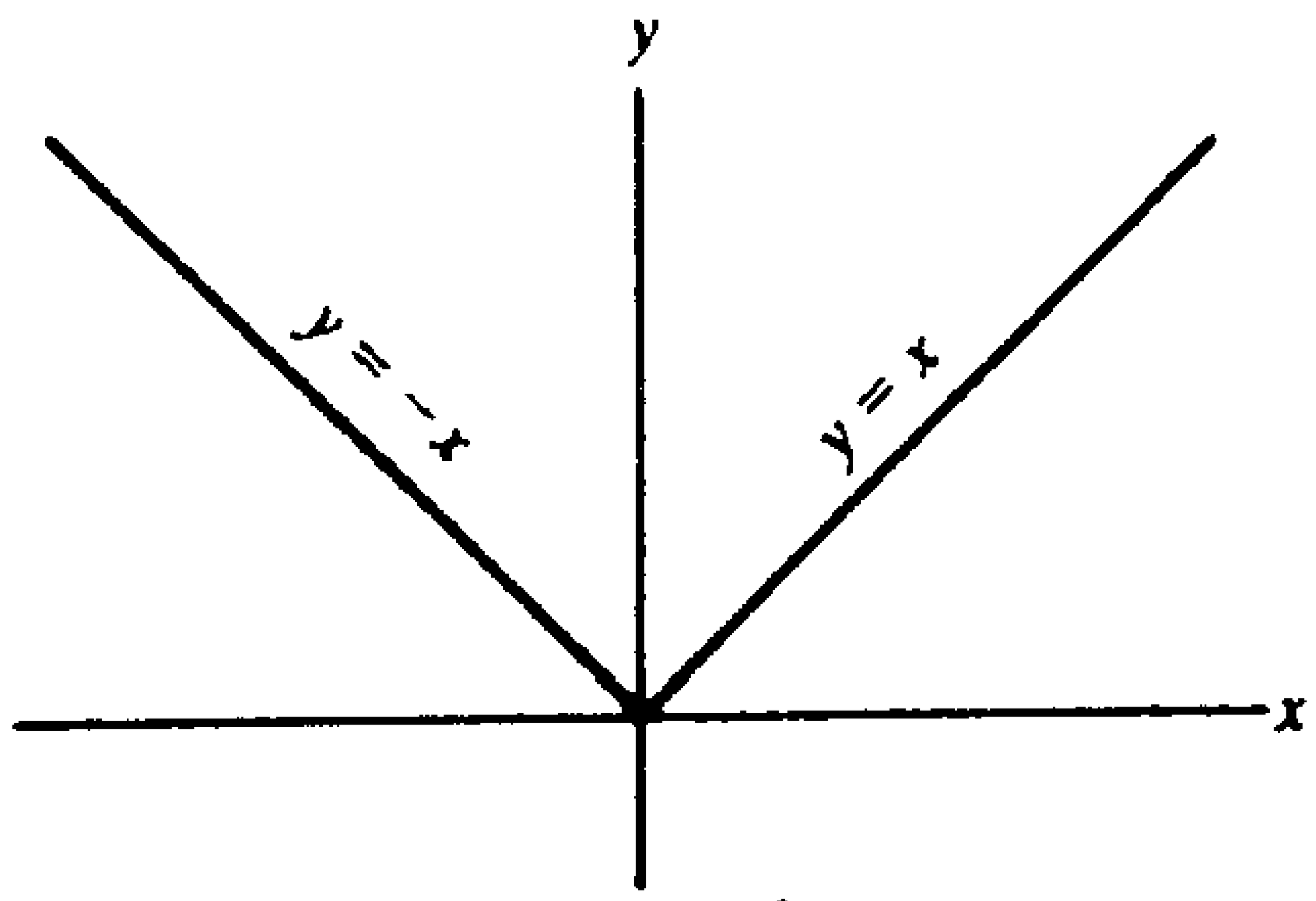
الرسم البيانى للدالة f هو رسم بيانى لفئة من النقاط على المستوى (x, y) ويحقق المعادلة $y = f(x)$.

مثال 1-3 :

(1) اعتبر الدالة $f(x) = |x|$. رسمها البيانى هو رسم المعادلة $y = |x|$ المبين بشكل 1-2 .

Example 1-3:

(1) Consider the function $f(x) = |x|$. Its graph is the graph of the equation $y = |x|$, shown in Figure 1-2.



شكل 1-2

لاحظ أن $f(x) = x$ عندما تكون $x \geq 0$ ، وأن $f(x) = -x$ عندما تكون $x \leq 0$.
ومجال f يتكون من كل الأعداد الحقيقية ولكن مداها هو فئة كل الأعداد الحقيقية السالبة .

(2) الصيغة $g(x) = 2x + 3$ تعرف الدالة g . ورسم هذه الدالة هو رسم المعادلة $y = 2x + 3$ والذى يمثل خط مستقيم ميله 2 والجزء المحصور 3 من محور y . فئة كل الأعداد الحقيقية تكون مجال ومدى الدالة g .

(2) The formula $g(x) = 2x + 3$ defines a function g. The graph of this function is the graph of the equation $y = 2x + 3$, which is the straight line with slope 2 and y intercept 3. The set of all real numbers is both the domain and range of g.

• المتتابعة اللانهائية Infinite Sequence

المتتابعة اللانهائية هى دالة مجالها هو فئة الأعداد الصحيحة الموجبة . ومثال ذلك عندما نعطى n قيم دورية 1 ,2 ,3 ,4 , ... تعرف الدالة بالصيغة $1/(n+1)$ وذلك يحقق التتابع $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{5}$، . . . . . وتسمى المتتابعة بالمتتابعة اللانهائية ومعنى ذلك أنه لا يوجد حد نهائى .

الحد العام أو الحد النونى لمتتابعة لانهائية نعنى به s_n لقيمة الدالة التى تعين المتتابعة . وغالبًا ما تعرف المتتابعة اللانهائية نفسها بوضع حدها العام داخل قوسين $\{ s_n \}$ أو بإظهار وكتابة عدد صغير من حدودها الأولى . ومثال ذلك فالحد العام s_n للمتتابعة فى الفقرة السابقة هو $1/(n+1)$ ونرمز للمعادلة بالرمز $\{1/(n+1)\}$ أو $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{5}$، . . . . .

• نهاية متتابعة Limit of Sequence

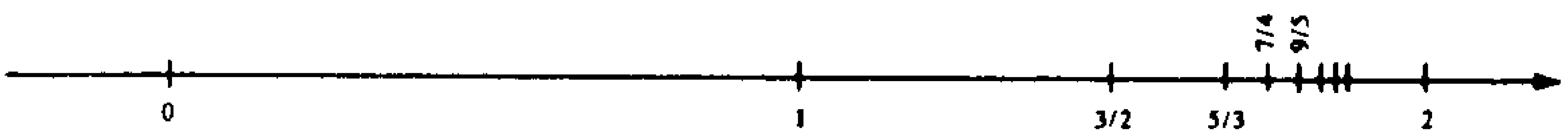
إذا كانت حدود المتتابعة $\{ s_n \}$ تقترب من عدد ثابت c حيث n تتسع أكثر وأكثر . فإن c فى نهاية المتتابعة ونكتب $a_n \to c$ أو $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = c$.
وهذا يعنى أن $|a_n - c| < \varepsilon$ ، ولا يهم اختيار $\varepsilon > 0$ متناهية الصغر .

مثال 1-4 : اعتبر المتتابعة

Example 1-4: Consider the sequence

$$1, 3/2, 5/3, 7/4, 9/5, \ldots\ldots 2-1/n, \ldots\ldots \qquad (1-1)$$

والتى رسمت حدودها على نظام إحداثى فى شكل 1-3 .



شكل 1-3

بازدياد n تحتشد النقط المتتالية باتجاه النقطة 2 وبذلك تكون المسافة بين هـذه النقاط والنقطة 2 أقل من أى عدد موجب قـد خصص لقياس الاقتـراب . (ومثـال لـذلك النقطة 2001/1001 = 1/1001 - 2 وكل النقاط المتتالية عند مسافة أقل من 1/1000 من النقطة 2 [بمعنى أنه $\varepsilon = 1/1000$]، النقطة 20 000 001/10 000 001 وكل النقاط المتتالية عند مسافة أقل من 1/10 000 000 من النقطة 2 [بمعنى أن $\varepsilon = 1/10\ 000\ 000$ وهكذا] ، إذا

$$\lim_{n \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2 \qquad \text{أو} \qquad \{2 - 1/n\} \to 2$$

المتتابعة (1-1) لا تحتوى على حد نهايتها 2 . ومن الناحية الأخرى ، المتتابعة . . . . . ,1, 1/2, 1, 3/4, 1, 5/6, 1 نهايتها 1 وكل حدودها الفرديـة هى العدد 1 . لذلك نهاية المتتابعة يمكن أن تحتويه المتتابعة كحد .

عديد من المتتابعات ليس لها نهاية ، مثل المتتابعة $\{(-1)^n\}$ وتكون . . . . . . ,1- ,1, -1, 1, -1, 1 وهى تحتفظ بالتبادل بيـن 1 ، 1- ولا تقـترب من أى عدد ثابت .

• نهاية دالة Limit of Function

إذا كانت f دالة ، إذا نقول $\lim_{x \to a} f(x) = A$ حيث أن $A < \infty$. إذا كانت قيمة f(x) تقترب افتراضيًا مـن A عندمـا تقـترب x مـن a ، إذا تكـون المسافة بينها صغيرة .

مثال 1-5 : $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$ حيث إن x^2 تقترب افتراضيًا من 9

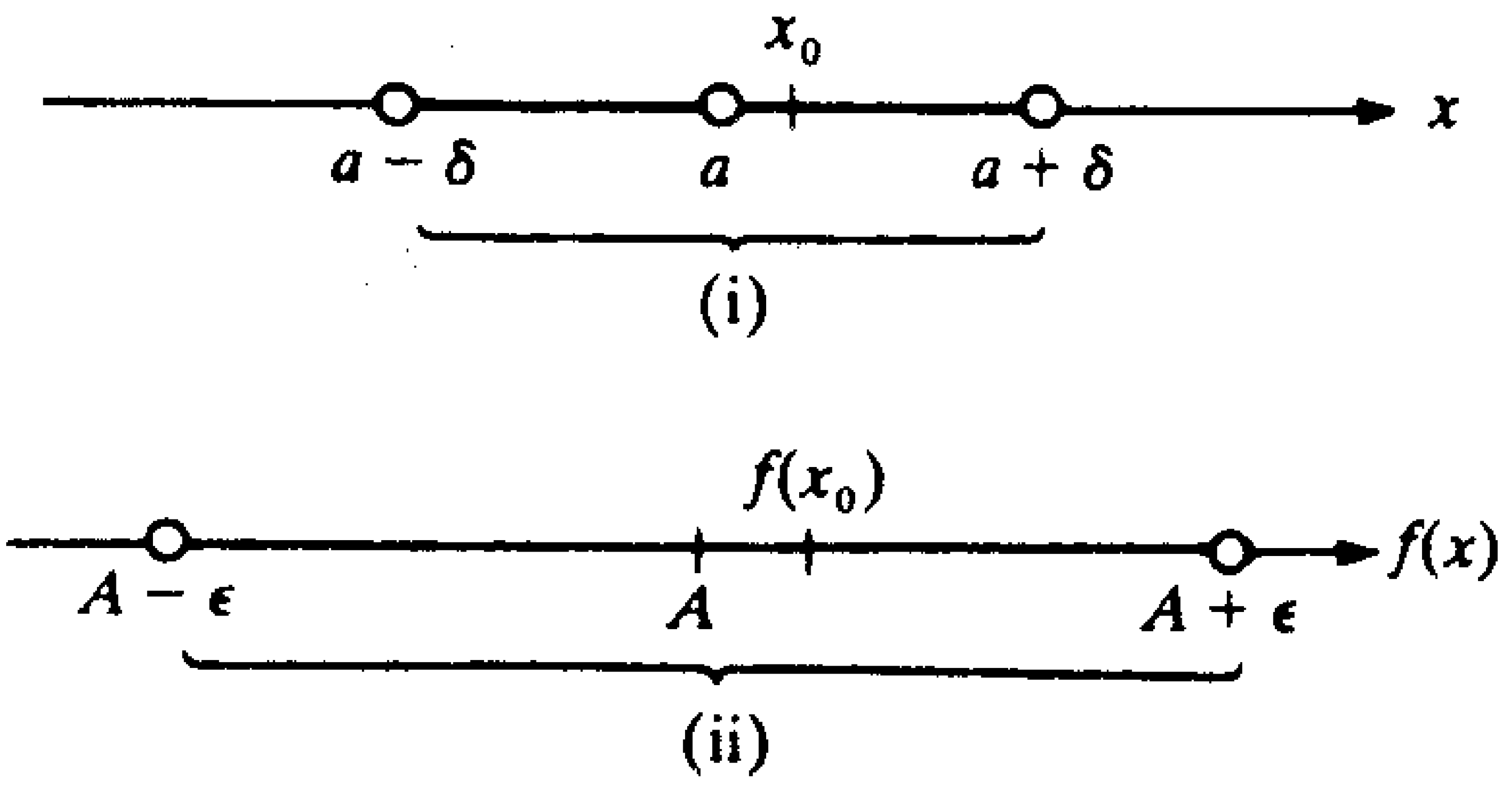
Example 1-5: $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$, since x^2 gets arbitrarily close to 9 as x.

عندما تقترب x من 3 .

يمكن أن يكون التعريف أكثر تحديدًا كما يلى :

تعريف

$\lim_{x\to a} f(x) = A$ إذا كان وإذا كان فقط لأى عدد مختار موجب ε ، أينما كان صغيراً يكون هناك عدد موجب δ حيث إن $0 < |x - a| < \delta$ إذا $|f(x) - A| < \varepsilon$ وهذا موضح بشكل 4-1 .



شكل 4-1

بعد اختيار ε [أى بعد اختيار الفترة (ii)] إذن يمكن إيجاد δ . [أى يمكن إيجاد الفترة (i)] لذلك عند $x \neq a$ تكون فى الفترة (i) نسميها x_0 إذن $f(x)$ تكون فى الفترة (ii) وعند $f(x_0)$.

لاحظ الحقيقة المهمة أنه عندما تكون أو لا تكون $\lim_{x\to a} f(x) = A$ حقيقية لا تعتمد على $f(x)$ عند $x = a$. فى الحقيقة $f(x)$ عادة لا تحتاج إلى أن تعرف عند $x = a$.

مثال 6-1 :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

مع أن $(x^2 - 4)/(x - 2)$ غير معرفة عند $x = 2$ وحيث إن

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = x + 2$$

إذن نرى أن $(x^2 - 4)/(x - 2)$ تقترب من 4 عندما تقترب x من 2 .

مثال 1-7 : دعنا نستخدم التعريف المحدد لنبين أن

Example 1-7: Let us use the precise definition to show that

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 3x) = 10$$

دعنا نختار $\varepsilon > 0$ لابد أن نقدم $\delta > 0$ متى كانت $\delta > |x - 2| > 0$.

إذن $\varepsilon > |(x^2 + 3x) - 10|$. أولاً نلاحظ أن

$$|(x^2 + 3x) - 10| = |(x - 2)^2 + 7(x - 2)| \le |x - 2|^2 + 7|x - 2|$$

حيث $\delta > |x - 2|$. أيضًا لو أن $1 \ge \delta > 0$ إذا $\delta \ge \delta^2$. لذلك إذا أخذنا δ لتكون أقل من 1 و $\varepsilon/8$ متى كانت $\delta > |x - 2| > 0$.

$$|(x^2 + 3x) - 10| < \delta^2 + 7\,\delta \le \delta + 7\,\delta = 8\delta \le \varepsilon$$

• نهاية الحد الأيمن والحد الأيسر Right and Left Limits

$\lim_{x \to a-} f(x) = A$ حيث $A < \infty$ تعني أن $f(x)$ تقترب من A عندما تقترب x من a خلال قيم أقل من a أى أن x تقترب من A من جهة اليسار . بالمثل $\lim_{x \to a+} f(x) = A$ تعني أن $f(x)$ تقترب من A عندما تقترب x من a من ناحية اليمين . المصطلح $\lim_{x \to a} f(x) = A$ مكافئ للمصطلحين المقترنين معًا $\lim_{x \to a-} f(x) = A$ و $\lim_{x \to a+} f(x) = A$.

لكي تكون A نهاية الدالة $f(x)$ عند $x \to a$ لابد أن تكون قيمة وحيدة ومحددة . وجود النهاية من اليمين لا يضمن وجودها من اليسار والعكس الصحيح . عندما تعرف دالة f من جهة واحدة لنقطة a ، إذن $\lim_{x \to a} f(x)$ تشير إلى نهاية من جهة واحدة إذا كانت موجودة .

مثال 1-8 : الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ إذا تعرف f فقط جهة يمين الصفر . إذن

$\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}=0$ $=$ $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$. وبالطبع $\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}$ ليس لها وجود .

وحيث أن $\sqrt{x}$ غير معرفة عند $x<0$.

Example 1-8: The function f(x) = $f(x)=\sqrt{x}$; then f is defined only to the right of zero. Hence, $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0=\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}=0$. Of course $\lim_{x\to 0-}\sqrt{x}$ does not exist, since $\sqrt{x}$ is not defined when $x<0$.

Theorems on Limits نظريات النهايات •

نظريات النهايات الآتية أعدت للمراجعة المستقبلية

النظرية 1-1 : إذا كانت $f(x)=c$ و a ثابت ، إذا $\lim_{x\to a} f(x)=c$.

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)=A$ و $\lim_{x\to a} g(x)=B$ حيث $A, B<\infty$. إذا :

النظرية 1-2 : $\lim_{x\to a} kf(x)=kA$ ، حيث إن k هو أى ثابت .

النظرية 1-3 : $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)=A\pm B$

النظرية 1-4 : $\lim_{x\to a}[f(x)\bullet g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\bullet\lim_{x\to a} g(x)=A\bullet B$

النظرية 1-5 : $B\neq 0$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}$

النظرية 1-6 : $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{A}$ ، $\sqrt[n]{A}$ هو عدد حقيقى .

Continuity الاتصال •

تسمى الدالة f(x) متصلة لو كانت متصلة عند كل نقطة فى مجالها .

الدالة f(x) متصلة عند $x=x_0$ إذا كانت $f(x_0)$ تعرف كالآتى :

$\lim_{x\to a_0} f(x)$ موجودة و $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

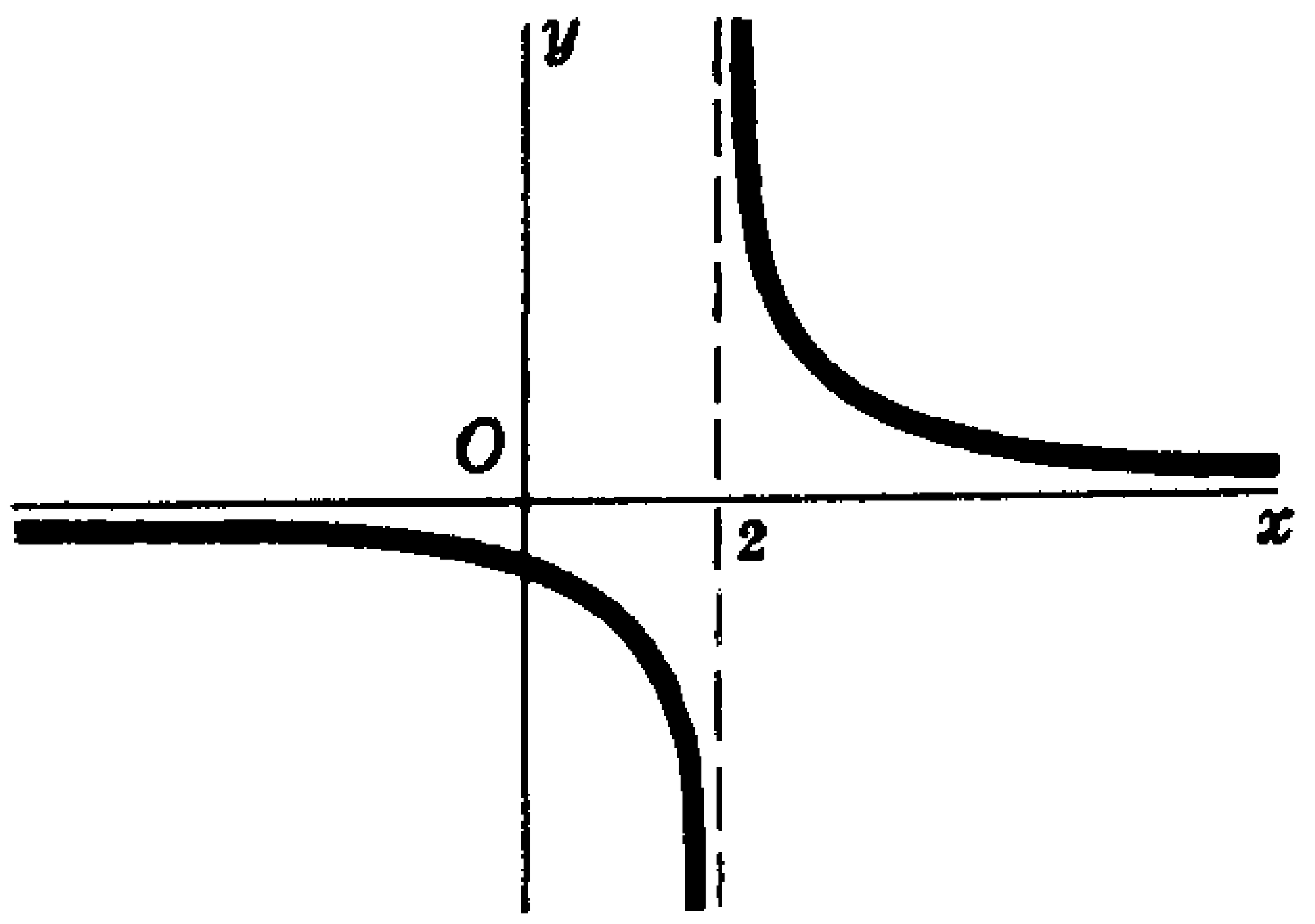
الدالة f تسمى متصلة خلال الفترة المغلقة [a, b] إذا كانت الدالة التى حددت أو قصرت f على [a, b] متصلة لكل نقطة فى [a, b] ، وبمعنى آخر ، إننا نهمل ما يحدث إلى يسار a وإلى يمين b . الدالة f(x) تكون غير متصلة عند $x = x_0$ لو أن شرطًا واحدًا أو أكثر للاتصال لم يتحقق .

مثال 1-9 : عين الاتصال فى :

Example 1-9: Determine the continuity of:

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \quad (\text{أ}) \qquad ، \qquad f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \quad (\text{ب})$$

(أ) هذه الدالة غير متصلة عند x = 2 لأن f(2) غير معرفة (المقام يكون صفرًا) ولأن $\lim_{x \to 2} f(x)$ غير موجودة (تساوى ∞) تكون الدالة متصلة عند كل النقاط ماعدا عند x = 2 ، وعندها تكون غير الاتصال مطلقًا ، انظر شكل 1-5 .



شكل 1-5

(ب) هذه الدالة غير متصلة عند x = 2 لأن f(2) غير معرفة (كلا البسط والمقام صفر) ، ومع ذلك $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$.

ويسمى عدم الاتصال هنا قابل للنقل حيث إنه يمكن نقله عن طريق إعادة تعريف الدالة f(x) باختصارها جبريًا للحصول على الدالة g(x)

المتصلة عند $x = 2$.

$$g(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2$$

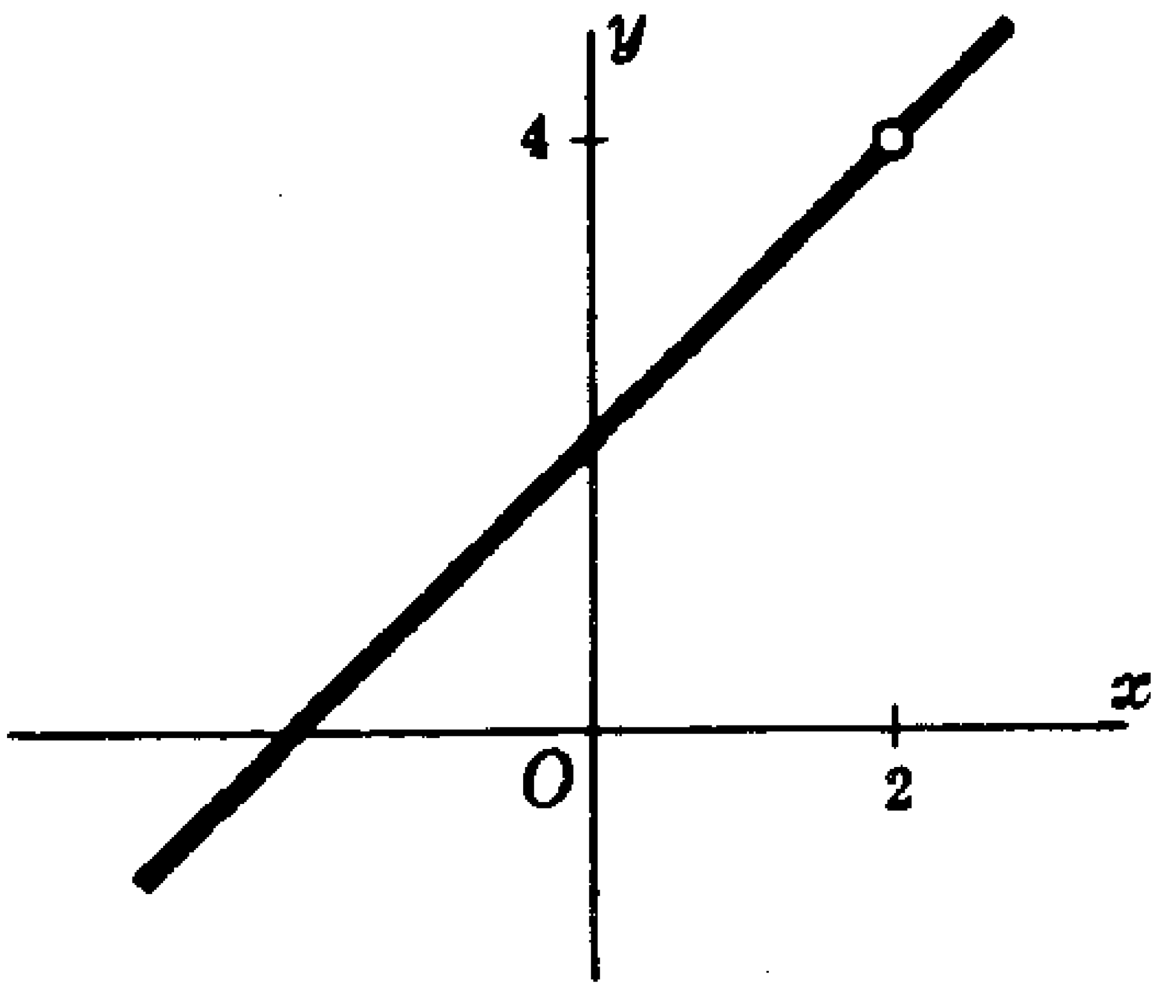
$$g(2) = 2 + 2 = 4$$

دم الاتصال فى الجزء (أ) لا يمكن نقله لأن النهاية غير موجودة .

الرسم البيانى للدالة

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \quad ; \quad g(x) = x + 2$$

متماثل ماعدا عند $x = 2$ ، والتى يكون عندها « ثقب » (انظر شكل 1-6) ونقل لعدم الاتصال هو ببساطة ملء « الثقب » .



شكل 1-6

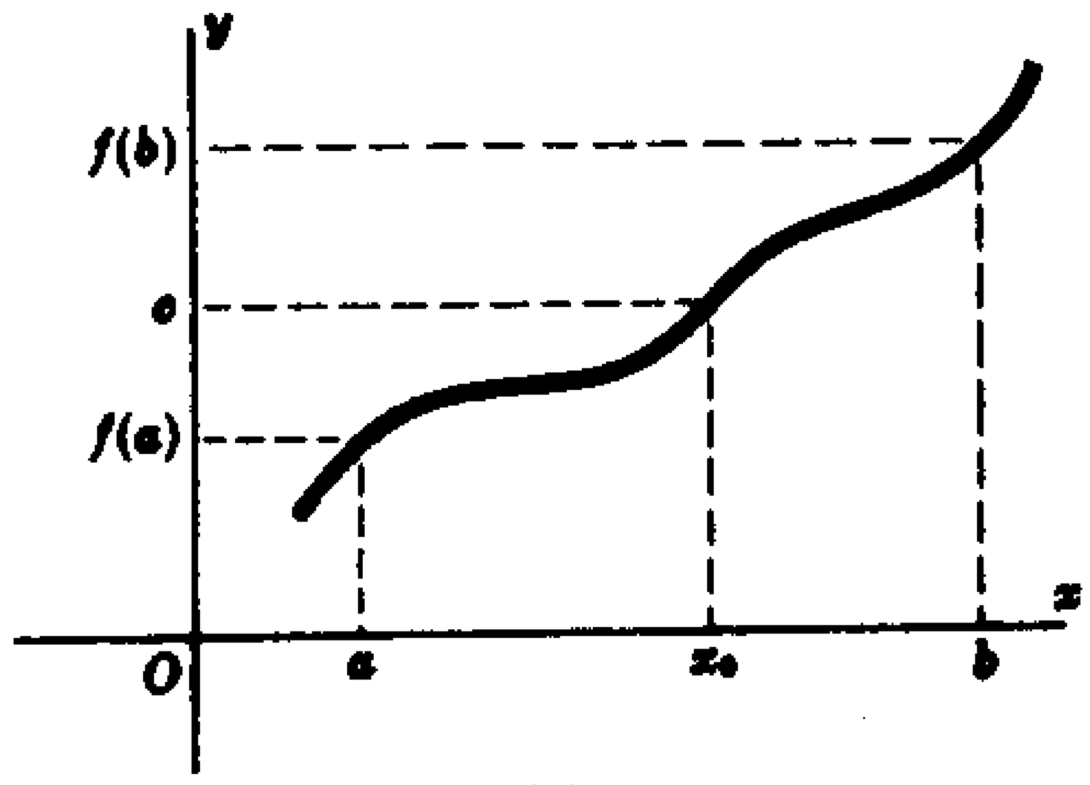
خواص الدوال المتصلة Properties of Continuous Functions

تقود نظريات النهايات إلى نظريات الدوال المتصلة . بالتدقيق إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتان متصلتان عند $x = a$ يكونا أيضًا $f(x) \pm g(x)$ ، $f(x) \bullet g(x)$ ، $f(x)/g(x)$ ، $g(a) \neq 0$ ، إذن حدود x متصلة أينما كانت حيث إن دوال المنطقية متصلة أينما كانت ماعدا قيم x التى يكون عندها المقام صفرًا .

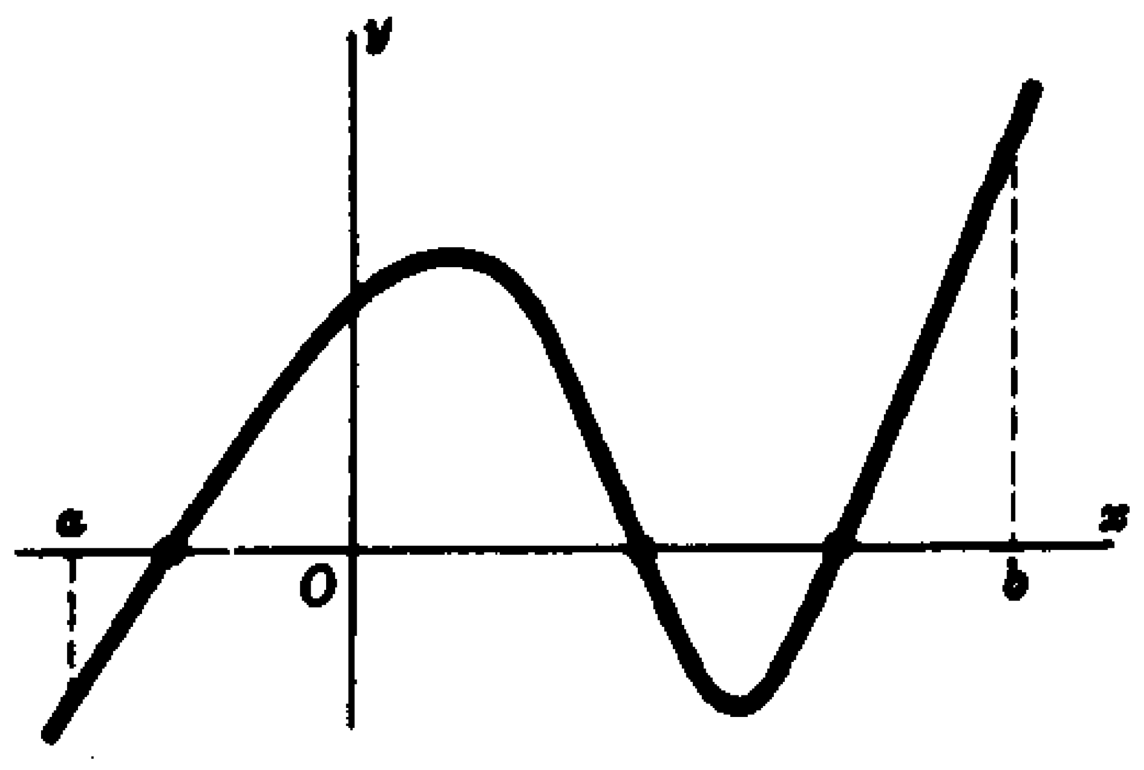
خاصية الدوال المتصلة المستخدمة هنا هى :

خاصية 1-1 : إذا كانت f(x) متصلة فى الفـترة $a \le x \le b$ وإذا كـانت $f(a) \ne f(b)$ ، يمكن لأى عدد c بين f(a) و f(b) هناك علـى الأقـل قيمـة واحدة للمتغير x ، وليكن $x = x_0$ حيث $f(x_0) = c$ و $a \le x_0 \le b$.

خاصية 1-1 تعرف أيضًا بنظرية القسمة المتوسطة . شكل 1-7 يوضح تطبيقين لهذه الخاصية وشكل 1-8 يبين أن الاتصال خلال الفترة يكون جوهريًا .

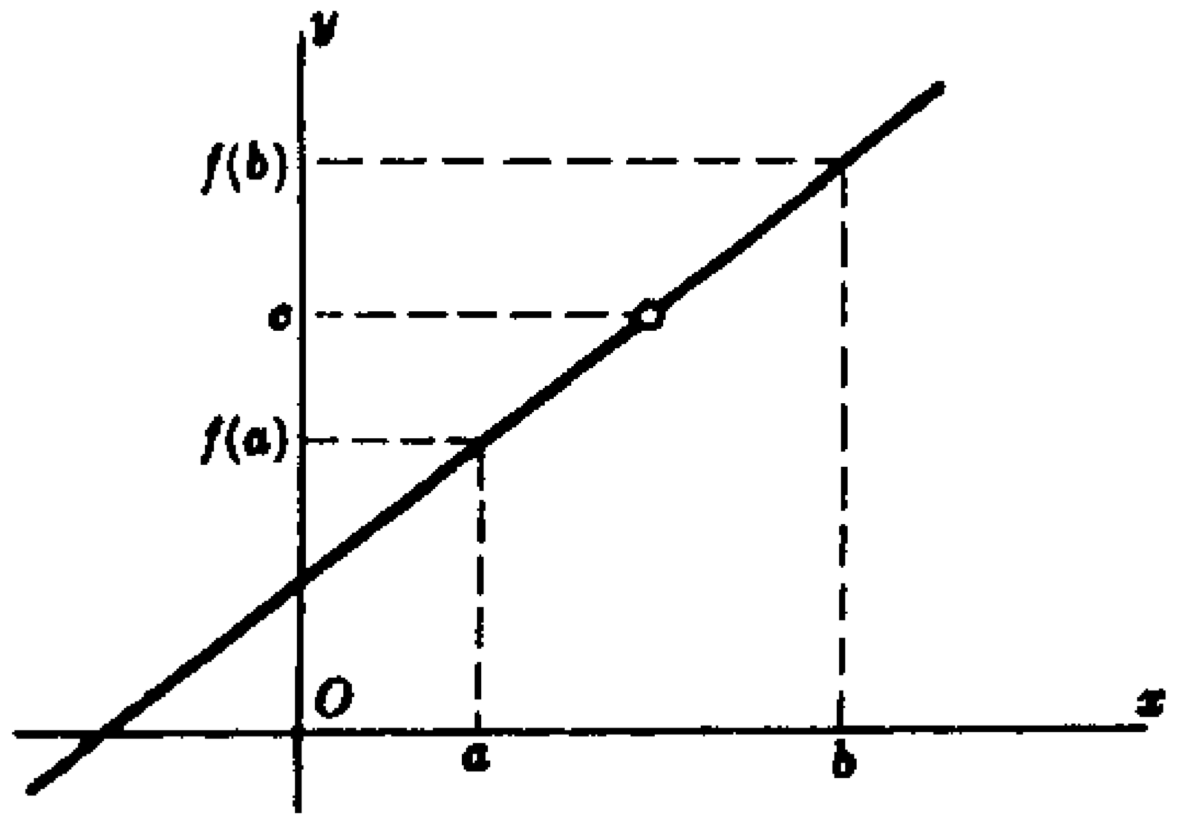


(a)

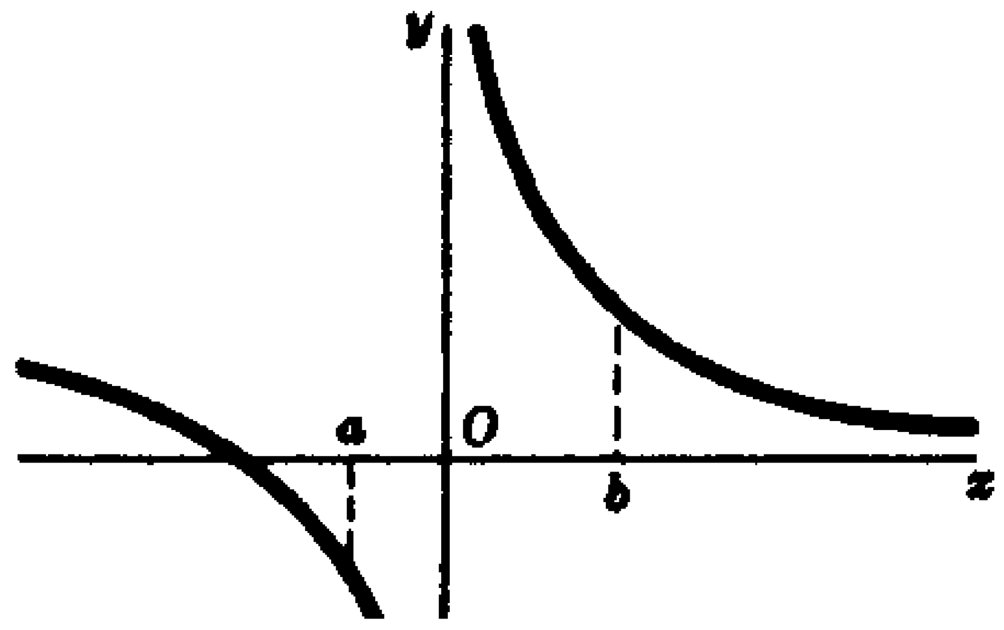


(b) f(x) = 0 ليس لها جذر
بين x = a و x = b

شكل 1-7



(a)

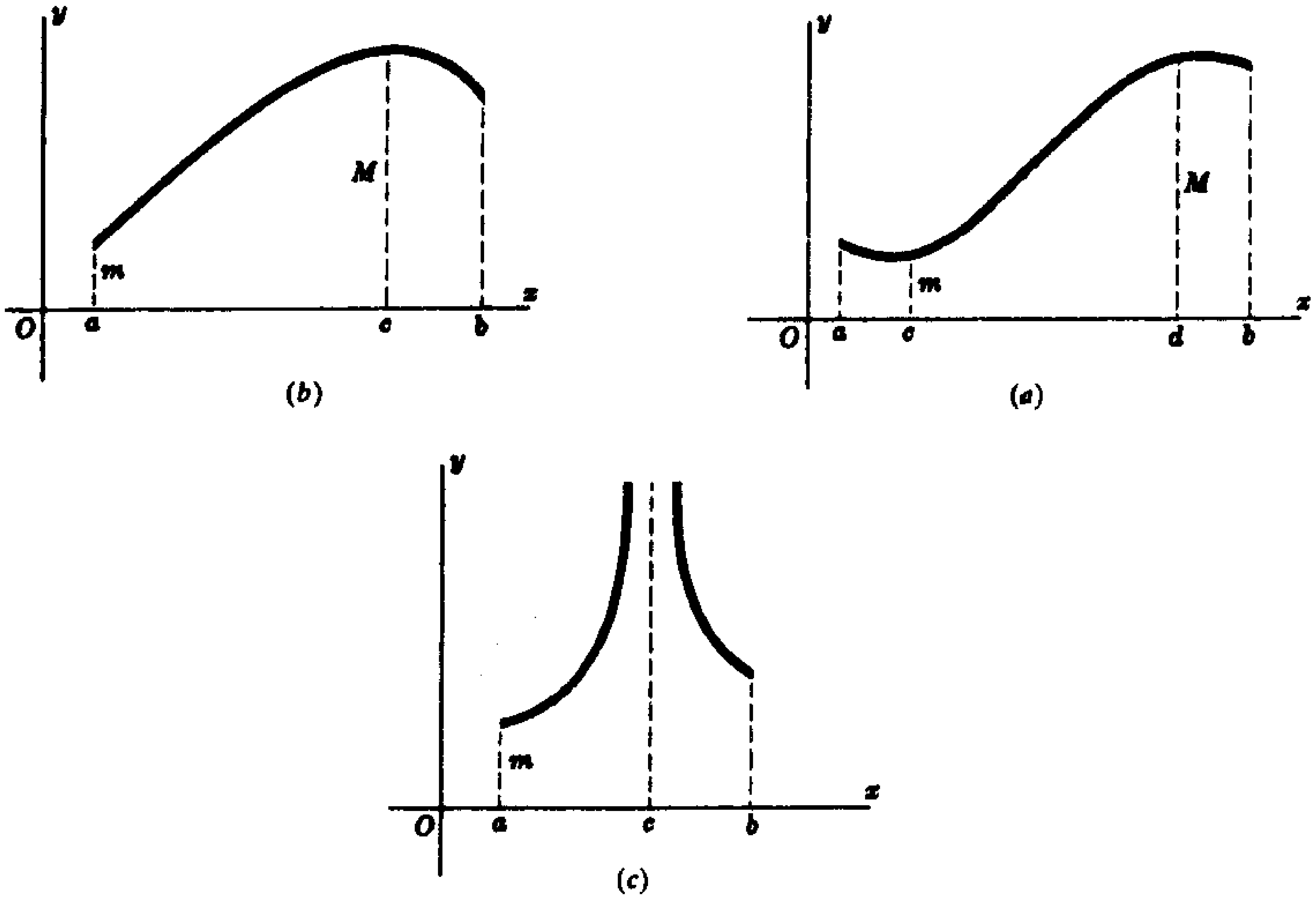


(b) f(x) = 0 ليس لها جذر
بين x = a و x = b

شكل 1-8

خاصية 1-2 : إذا كانت f(x) متصلة فى الفترة $a \le x \le b$ ، إذا كـانت f(x) تأخذ أقل قيمة m وأعلى قيمة M فى الفترة .

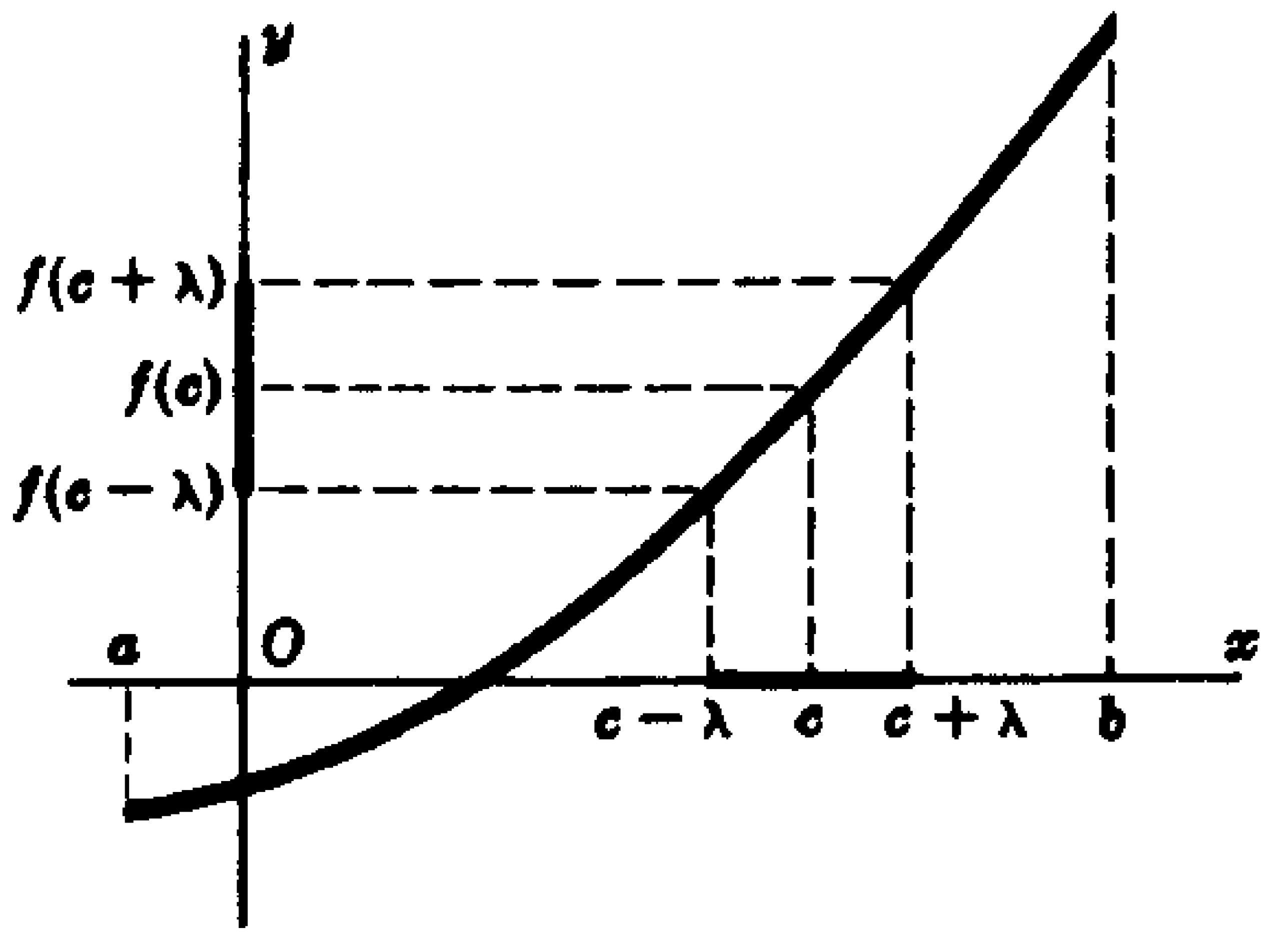
انظر الأشكال من 1-8 إلـى 1-10 . فـى شكـل 1-8 الدالـة متصلـة فـى الفترة $a \le x \le b$ ، أقل قيمة m وأعلى قيمة M تحدث عند $x = c$ و $x = d$ على الترتيب كلا النقطتين فى خلال الفترة . فى شكل 1-9 الدالة متصلة



شكل 1-9

فى $a \le x \le b$ أقل قيمة تحدث عند $x = a$ ، بينما أعلى قيمة تحدث عند $x = c$ فى خلال الفترة . فى شكل 10-1 يوجد عدم اتصال عند $x = c$ ، حيث إن $a < c < b$ أقل قيمة للدالة عند $x = a$ لكن ليس لها أعلى قيمة .

خاصية 3-1 : إذا كانت $f(x)$ متصلة فى الفترة $a \le x \le b$ ولو أن c أى عدد بين a , b وكانت $f(c) > 0$ ، إذ يوجد عدد $\lambda > 0$ حيث إنه متى كانت $c - \lambda < x < c + \lambda$ ، تكون $f(x) > 0$ هذه الخاصية موضحة فى شكل 10-1 .



شكل 1-10

• مسائل محلولة Solved Problems

مسألة محلولة 1-1 : قطعة أرض مستطيلة تحتاج 2000 ft من السياج لإحاطته . إذا كان أحد أبعاده x (بالقدم) ، استنتج مساحة y (بالقدم المربع) كدالة فى المتغير x وعين مجال الدالة .

Solves problem 1-1 : A rectangular plot requires 2000 ft of fencing to enclose it. if one of its dimensions is x (in feet), express its area y (in square feet) as a function of x, and determine the domain of the function.

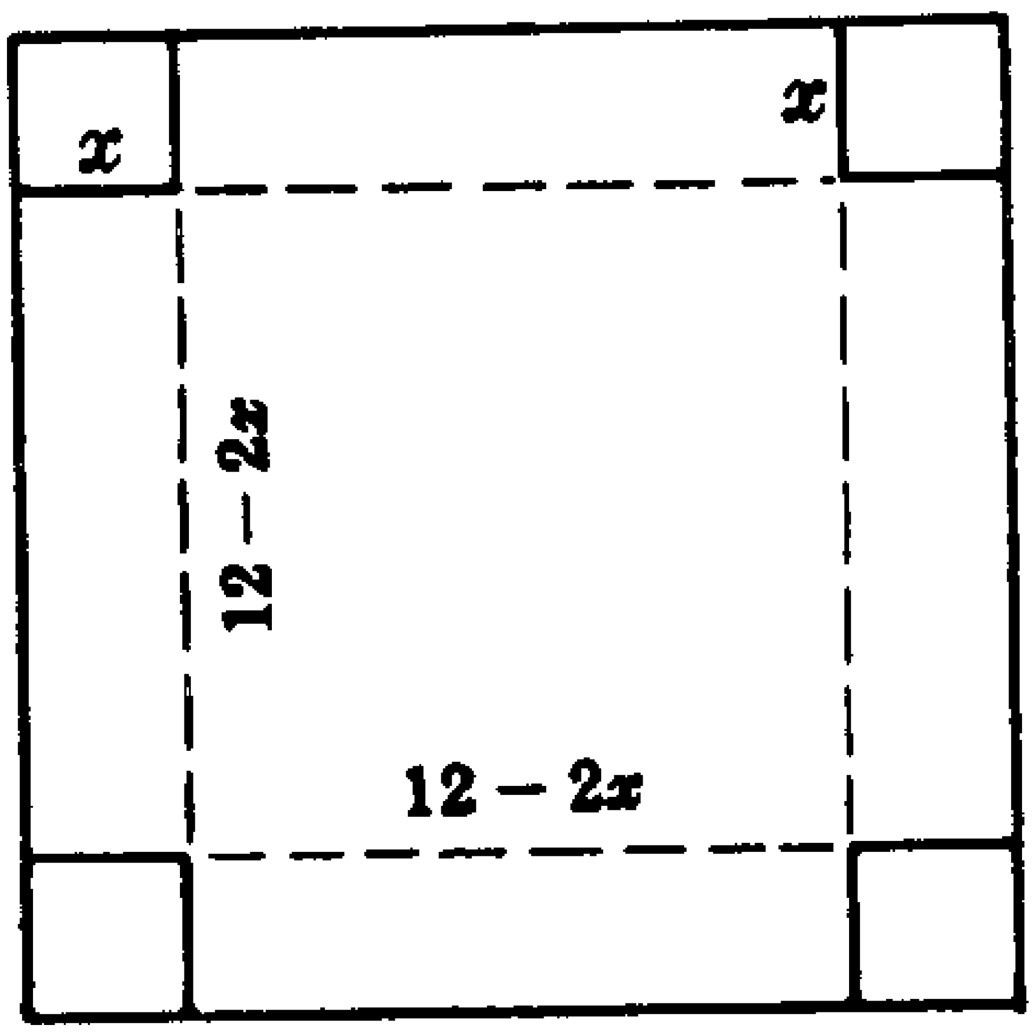
الحل : حيث إن أحد الأبعاد هى x ، يكون الآخر :

$$\frac{1}{2}(2000 - 2x) = 1000 - x$$

وتكون المساحة $y = x(1000 - x)$ والمجال لهذه الدالة هو $0 < x < 1000$.

مسألة محلولة 1-2 : مربع من الصفيح الرقيق طول ضلعه 12 in تم نزع مربع صغير طول ضلعه x عن كل ركن من المربع الصفيح ثم ثنيت أطراف المربع الصفيح بعد ذلك ليصبح صندوق فارغ (شكل SP1-1) .
استنتج حجم V (بالبوصة المكعبة) كدالة فى x وعين مجال الدالة .

Solves problem 1-2 : From each corner of a square of tin, 12 in on a side small squares of side x(in inches) are removed, and the edges are turned up to form an open box (Figure SP1-1). Express the volume V of the box (in cubic inches) as a function of x, and determine the domain of the function



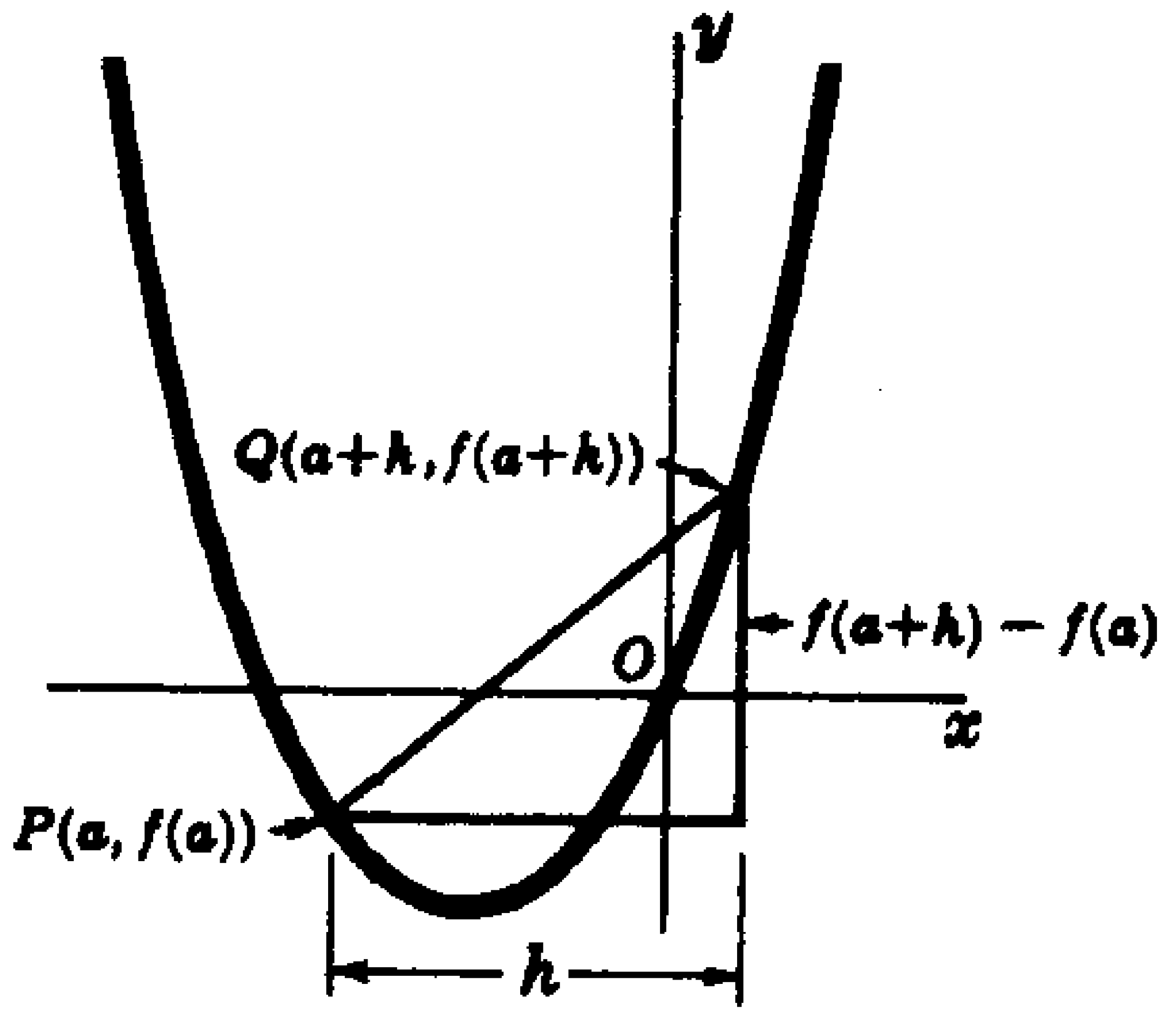
شكل SP1-1

الحل : الصندوق له قاعدة مربعة طول ضلعها 2x - 12 وارتفاع x . حجم الصندوق هو $V = x(12-2x)^2 = 4x(6-x)^2$. المجال هو الفترة $0 < x < 6$. كلما زادت x عن مجالها ، يزداد V لوقت ما ثم يتناقص بعد ذلك . لذلك بين هذه الصناديق لا يوجد الحجم الأكبر M . ولتعيين M من الضرورة إيجاد بالتحديد قيمة x التى عندها يتوقف ازدياد V .

مسألة محلولة 1-3 : إذا كان $f(x) = x^2 + 2x$ أوجد $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ وفسر النتيجة .

Solves problem 1-3 : If $f(x) = x^2 + 2x$, find $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ and interpret the result

الحل :



شكل SP1-2

فى الرسم البيانى للدالة (شكل SP1-2) ، وقع النقاط P و Q والتى قيمها على محور x هو a و a + h . وإحداثى P الرأسى هو f(a) وإحداثى Q الرأسى هو f(a + h) ، إذن :

$$\text{PQ ميل} = \frac{\text{اختلاف الإحداث الرأسى}}{\text{اختلاف الإحداث الأفقى}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{[(a+h)^2+2(a+h)]-(a^2+2a)}{h} = 2a+2+h$$

مسألة محلولة 1-4 : اكتب الحد العام لكل متتابعة آتية :

Solves problem 1-4 : Write the general term of each of the following sequences:

(أ) $1 \text{ ،} \frac{1}{3} \text{ ،} \frac{1}{5} \text{ ،} \frac{1}{7} \text{ ،} \frac{1}{9}, \ldots$

(ب) $1 \text{ ،} -\frac{1}{2} \text{ ،} \frac{1}{3} \text{ ،} -\frac{1}{4} \text{ ،} \frac{1}{5}, \ldots$

(جـ) $\frac{1}{2} \text{ ،} -\frac{4}{9} \text{ ،} \frac{9}{28} \text{ ،} -\frac{16}{65} \ldots$

الحل :

(أ) الحدود تبادلية للأعداد الفردية الصحيحة ، الحد العام هو $\frac{1}{2n-1}$.

(ب) بعيدًا عن الإشارة (السالبة والموجبة) هناك تبادل بين الأعداد الموجبة .

الحد العام هو $(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ أو $(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

(جـ) بعيدًا عن الإشارة ، البسط هو مربع الأعداد الصحيحة الموجبة والمقام هو مكعب هذه الأعداد الصحيحة التى تزداد بقيمة 1 .

الحد العام هو $(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+1}$.

الفصل الثانى
التفاضل
Differentiation

فى هذا الفصل :

- ✔ المشتقة .
- ✔ التفاضل .
- ✔ قواعد التفاضل .
- ✔ الدوال العكسية .
- ✔ قاعدة التسلسل .
- ✔ المشتقات الأعلى .
- ✔ التفاضل الضمنى .
- ✔ مشتقات الرتبة الأعلى .
- ✔ مسائل محلولة .

• المشتقة The Derivative

التغير فى المتغير x بين قيمتين $x = x_0$ و $x = x_1$ فى مجاله هو التزيد Δx . خصوصاً لو $\Delta x = x_1 - x_0$. يمكن أن نكتب $x_1 = x_0 + \Delta x$ لو تتغير x بالتزايد Δx من قيمة ابتدائية $x = x_0$ ، إذن نكتب $x = x_0 + \Delta x$ وبنفس

التصور التغير فى الدالة $y = f(x)$ المقـدرة بيـن $x = x_0$ و $x = x_0 + \Delta x$ تسمى التزايد $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ إذن خارج القسمة .

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{التغير فى } y}{\text{التغير فى } x}$$

يسمى المعدل المتوسط لتغير الدالة فى الفترة بين $x = x_0$ و $x = x_0 + \Delta x$.

مثال 2-1 : عندما تعطى x التزايد $\Delta x = 0.5$ من $x_0 = 1$ ، تعطـى الدالـة $y = f(x) = x^2 + 2x$ التزايد $\Delta y = f(1 + 0.5) - f(1) = 5.25 - 3 = 2.25$. إذن المعدل المتوسط لتغير الدالة y فى الفترة بين $x = 1$ و $x = 1.5$ هو

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2.25}{0.5} = 4.5$$

Example 2-1: When x is given the increment $\Delta x = 0.5$ from $x_0 = 1$, the function $y = f(x) = x^2 + 2x$ is given the increment $\Delta y = f(1 + 0.5) - f(1) = 5.25 - 3 = 2.25$. Thus, the average rate of change of y on the interval between $x = 1$ and $x = 1.5$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2.25}{0.5} = 4.5$$

مشتقة الدالة $y = f(x)$ بالنسبة إلى x عند النقطة $x = x_0$ معرفة كالآتى :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

بفرض وجود النهاية . هذه النهاية تسمى أيضًا معـدل التغيـر اللحظـى للدالة y بالنسبة إلى x عند $x = x_0$.

مثال 2-2 : أوجد مشتقة الدالة $y = f(x) = x^2 + 3x$ بالنسبة إلـى x عنـد $x = x_0$. استخدم ذلك لإيجاد قيمة المشتقة عند :

(أ) $x_0 = 2$ و (ب) $x_0 = -4$.

Example 2-2: Find the derivative of $y = f(x) = x^2 + 3x$ with respect to x at $x = x_0$. Use this to find the value of the derivative at (a) $x_0 = 2$ and (b) $x_0 = -4$.

$$f(x_o) = x_o^2 + 3x_o$$

$$f(x_o + \Delta x) = (x_o + \Delta x)^2 + 3(x_o + \Delta x)$$
$$= x_o^2 + 2x_o \Delta x + (\Delta x)^2 + 3x_o + 3 \Delta x$$
$$\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = 2x_o \Delta x + 3 \Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = 2x_o + 3 + \Delta x$$

المشتقة عند $x = x_0$ هى

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_o + 3 + \Delta x) = 2x_o + 3$$

(أ) $x_0 = 2$ ، قيمة المشتقة هى $2(2) + 3 = 7$.

(ب) $x_0 = -4$ ، قيمة المشتقة هى $2(-4) + 3 = -5$.

فى إيجاد المشتقات معتاد أن نسقط الرمز السفلى 0 ونحسب المشتقة للدالة $y = f(x)$ بالنسبة إلى x كما يأتى .

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

مشتقة $y = f(x)$ بالنسبة إلى x يمكن الإشارة إليها بأى من الرموز الآتية :

$$\frac{d}{dx}y \ , \ \frac{dy}{dx} \ , \ D_x \ y' \ , \ f'(x) \ , \ \frac{d}{dx}f(x)$$

• التفاضل Differentiation

يقال للدالة أنها قابلة للاشتقاق عند نقطة $x = x_0$ إذا كانت مشتقة هذه الدالة موجودة عند هذه النقطة . أيضًا يقال لدالة أنها قابلة للاشتقاق خلال فترة لو أنها قابلة للاشتقاق عند كل نقط هذه الفترة . دالة الأعداد الأولية هى دالة قابلة للاشتقاق ما عدا عند النقط المعزولة فى فتراتها المعرفة . إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق فلابد أن تكون دالة متصلة . عملية إيجاد مشتقة الدالة تسمى التفاضل .

• قواعد التفاضل Differentiation Rules

فى الصيغ الآتية u, v, w هى دالة قابلة للاشتقاق (للتفاضل) للمتغير x ، c و m ثابتان .

قاعدة 1
$$\frac{d}{dx}(c)=0$$

قاعدة 2
$$\frac{d}{dx}(x)=1$$

قاعدة 3
$$\frac{d}{dx}(u+v+\cdots)=\frac{d}{dx}(u)+\frac{d}{dx}(v)+\cdots$$

قاعدة 4
$$\frac{d}{dx}(cu)=c\frac{d}{dx}(u)$$

قاعدة 5
$$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{d}{dx}(v)+v\frac{d}{dx}(u)$$

قاعدة 6
$$\frac{d}{dx}(uvw)=uv\frac{d}{dx}(w)+uw\frac{d}{dx}(v)+vw\frac{d}{dx}(u)$$

قاعدة 7
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{1}{c}\frac{d}{dx}(u),\ c\neq 0$$

قاعدة 8
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{u}\right)=c\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{c}{u^2}\frac{d}{dx}(u),\ u\neq 0$$

قاعدة 9
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{d}{dx}(u)-u\frac{d}{dx}(v)}{v^2},\ v\neq 0$$

قاعدة 10
$$\frac{d}{dx}(x^m)=mx^{m-1}$$

قاعدة 11
$$\frac{d}{dx}(u^m)=mu^{m-1}\frac{d}{dx}(u)$$

مثال 2-3 : فاضل : $y = 4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4 + 9x^5$

Example 2-3: Differentiate $y = 4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4 + 9x^5$

$$\frac{dy}{dx}=0+2(1)-3(2x)-5(3x^2)-8(4x^3)+9(5x^4)$$
$$=2-6x-15x^2-32x^3+45x^4$$

مثال 2-4 : فاضل : $y=\frac{3-2x}{3+2x}$

Example 2-4: Differentiate $y=\frac{3-2x}{3+2x}$

$$y'=\frac{(3+2x)\frac{d}{dx}(3-2x)-(3-2x)\frac{d}{dx}(3+2x)}{(3+2x)^2}$$
$$=\frac{(3+2x)(-2)-(3-2x)(2)}{(3+2x)^2}=\frac{-12}{(3+2x)^2}$$

• الدوال العكسية Inverse Functions

الدالتان f و g بحيث $g(f(x))=x$ و $f(g(x))=y$ يسميان دالتان عكسـيتان .
الدوال العكسية تعكس تأثير كل منهما .
خاصة إذا كان $f(a)$ ، إذا $g(b)=a$

مثال 2-5 :

(أ) معكوس الدالة $f(x)=x+1$ هو الدالة $g(y)=y-1$.

(ب) معكوس الدالة $f(x)=-x$ هو نفس الدالة .

(جـ) معكوس الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ هو الدالة $g(y)=y^2$ (معرفة لقيم $y\geq 0$) .

(د) معكوس الدالة $f(x)=2x-1$ هو الدالة $g(y)=y=\frac{y+1}{2}$.

> للحصول على معكوس الدالة نحل المعادلة $y=f(x)$ أو x فى حـدود y ، لو أمكن ذلك .

ليست كل دالة هى دالة عكسية . مثال ذلك الدالة $f(x) = x^2$ ليس لها معكوس . حيث إن $f(1) = f(-1) = 1$. دالة عكسية مثل g تحقق $g(1) = 1$ ، $g(1) = -1$ يكون مستحيلاً . لكن لو حددنا الدالة $f(x) = x^2$ بالمجال $x \geq 0$ تكون الدالة $g(y) = y^2$ هى دالة عكسية للدالة f والتى نعرفها بالدالة $y = \pm\sqrt{x}$. والشرط هنا أن الدالة f لكى يكون لها معكوس قيمة بقيمة ، بمعنى لأى x_1 و x_2 فى مجال f لو $x_1 \neq x_2$ إذن $f(x_1) \neq f(x_2)$.

ملاحظة : نرمز إلى دالة f العكسية بالرمز f^{-1} . إذا كان $y = f(x)$. غالبًا نكتب $x = f^{-1}(y)$ إذا كانت f دالة قابلة للتفاضل ، عادة ، نكتب $\frac{dy}{dx}$ لمشتقة $f'(x)$ و $\frac{dx}{dy}$ لمشتقة $(f^{-1})'(y)$.

إذا كانت الدالة f لها دالة عكسية ولدينا صيغة $f(x)$ ، إذن لإيجاد صيغة للدالة العكسية f^{-1} ، نحل المعادلة $y = f(x)$ فى حدود y . كمثال معطى $f(x) = 5x + 2$ ، اجعل $y = 5x + 2$ إذن

$$x = \frac{y-2}{5} .$$

ونحل بالنسبة إلى y ، نحصل على صيغة الدالة العكسية

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{5}$$

الصيغة التفاضلية لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ تعطى $\frac{dx}{dy}$:

قاعدة 12
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(dx/dy)}$$

مثال 2-6 : أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $x = \sqrt{y} + 5$

Example 2-6: Find dy/dx, given $x = \sqrt{y} + 5$

الطريقة الأولى : حلل المعادلة $y = (x - 5)^2$ ، إذا $\frac{dy}{dx} = 2(x - 5)$

الطريقة الثانية : فاضل لإيجاد

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} y^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

• استخدم القاعدة 12

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} = 2(x-5).$$

• قاعدة التسلسل The chain Rule

الدالتين f و g تسمى الدالة التى صيغتها f(g(x)) بالدالـة المركبـة إذا كان f و g قابلتين للتفاضل ، إذا أمكن الحصول على الدالـة المركبـة وتفاضلها بطريقتين الأولى : هى حساب صيغـة ضمنيـة للدالـة f(g(x)) وتفاضلها .

مثال 2-7 : إذا كانت $f(x) = x^2 + 3$ و $g(x) = 2x + 1$ إذن

$y = f(g(x)) = (2x + 1)^2 + 3 = 4x^2 + 4x + 4$ و $\frac{dy}{dx} = 8x + 4$

Example 2-7: If $f(x) = x^2 + 3$ and $g(x) = 2x + 1$, then

$y = f(g(x)) = (2x + 1)^2 + 3 = 4x^2 + 4x + 4$ and $\frac{dy}{dx} = 8x + 4$

تفاضل الدالة المركبة يمكن الحصول عليه من القاعدة الآتية :

• قاعدة 13 : قاعدة التسلسل $D_x(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$

إذا سميت f بالـدالة الخارجية و g بالـدالة الداخلية ، إذن $D_x(f(g(x)))$ هو حاصل ضرب تفاضل الدالة الخارجية [يحسب عند g(x)] وتفاضل الدالة الداخلية .

مثال 2-8 : فى مثال 2-7 $f'(x) = 2x$ ، إذن $f'(g(x)) = 2\,g(x)$ و $g'(x) = 2$
وبواسطة قاعدة التسلسل .

Example 2-8: In Example 2-7, $f'(x) = 2x$. Therefore, $f'(g(x)) = 2g(x)$ and $g'(x) = 2$. Hence by the chain rule.

$$D_x(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x) = 2g(x) \cdot 2 = 4g(x) = 4(2x + 1) = 8x + 4$$

تحتاج أن تعلم

صيغة بديلة لقاعدة التسلسل وهى كما يأتى :

اكتب $y = f(u)$ و $u = g(x)$. إذن الدالة المركبة هى $y = f(u) = f(g(x))$

ولدينا قاعدة التسلسل : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

مثال 2-9 : دع $y = u^3$ و $u = 4x^2 - 2x + 5$.
إذن المركبة هى $y = (4x^2 - 2x + 5)^3$ وتفاضلها هو :

Example 2-9: Let $y = u^3$ and $u = 4x^2 - 2x + 5$. Then the composite function $y = (4x^2 - 2x + 5)^3$ has the derivative:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 3u^2(8x - 2) = 3(4x^2 - 2x + 5)^2(8x - 2)$$

ملاحظة : فى الصيغة الثانية لقاعدة التسلسل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx},$$

ترمز y التى فى الجانب الأيسر إلى الدالة المركبة للمتغير x ، بينما ترمز y التى فى الجانب الأيمن إلى الدالة الأصلية للمتغير u (التى سميناها قبلاً بالدالة الخارجية) .

مثال 2-10 : فاضل $y = (x^2 + 4)(2x^3 - 1)^3$

Example 2-10: Differentiate $y = (x^2 + 4)^2 (2x^3 - 1)^3$.

$$y' = (x^2+4)^2 \frac{d}{dx}(2x^3-1)^3 + (2x^3-1)^3 \frac{d}{dx}(x^2+4)^2$$

$$= (x^2+4)^2 (3)(2x^3-1)^2 \frac{d}{dx}(2x^3-1) + (2x^3-1)^3 (2)(x^2+4) \frac{d}{dx}(x^2+4)$$

$$= (x^2+4)^2 (3)(2x^3-1)^2 (6x^2) + (2x^3-1)^3 (2)(x^2+4)(2x)$$

$$= 2x(x^2+4)(2x^3-1)^2(13x^3+36x-2)$$

• المشتقات الأعلى Higher Derivatives

دع $y = f(x)$ أن تكون دالة قابلة للاشتقاق للمتغير x ودع مشتقتها تسمى المشتقة الأولى (التفاضل الأول) للدالة . إذا كانت المشتقة الأولى قابلة للتفاضل تسمى مشتقتها بالمشتقة الثانية (التفاضل الثانى) للدالة الأصلية ونرمز لها بأحد الرموز التالية :

$$\frac{d^2y}{dx^2},\ y'',\ \text{or}\ f''(x)$$

وبالتالى مشتقة التفاضل الثانى تسمى المشتقة الثالثة (التفاضل الثالث) للدالة ونرمز له بأحد هذه الرموز .

$$\frac{d^3y}{dx^3},\ y''',\ \text{or}\ f'''(x)$$

وهكذا . . .

ملاحظة

التفاضل لدرجة معينة عند نقطة يمكن إيجاده فقط عندما تكون الدالة وكل مشتقاتها الأقل درجة قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة .

مثال 2-11 : $f(x)=\frac{2}{1-x}=2(1-x)^{-1}$ أوجد $f^{(n)}(x)$.

Example 2-11: Given $f(x)=\frac{2}{1-x}=2(1-x)^{-1}$, find $f^{(n)}(x)$.

$$f'(x)=2(-1)(1-x)^{-2}(-1)=2(1-x)^{-2}=2(1!)(1-x)^{-2}$$
$$f''(x)=2(1!)(-2)(1-x)^{-3}(-1)=2(2!)(1-x)^{-3}$$
$$f'''(x)=2(2!)(-3)(1-x)^{-4}(-1)=2(3!)(1-x)^{-4}$$

وبالتالى نقترح $f^{(n)}(x) = 2(n!)(1-x)^{-(n+1)}$. هذه النتيجة يمكن تأكيدها رياضيًا ببيان أن :

إذن $f^{(k)}(x) = 2(k!)(1-x)^{-(k+1)}$

$$f^{(k+1)}(x) = -2(k!)(k+1)(1-x)^{-(k+2)}(-1) = 2[(k+1)!](1-x)^{-(k+2)}$$

• التفاضل الضمنى Implicit Differentiation

المعادلة $f(x, y) = 0$ من المحتمل أن يكون لها مـدى مقيـد للمتغـيرات نقول لتعريف y ضمنيًا كدالة فى x .

مثال 2-12 :

(أ) المعادلة $xy + x - 2 - 1 = 0$ مع $x \neq 2$ تعرف الدالة

Example 2-12:

(a) The equation $xy + x - 2y - 1 = 0$, with $x \neq 2$, defines the function

$$y=\frac{1-x}{x-2}$$

(ب) المعادلة $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ تعرف الدالة

(b) The equation $4x^2 + 9x^2 - 36 = 0$, defines the function

$$y=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$$

... $|x|$ و $y = 0$ والدالة

$$y=-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$$

المسمة y' يمكن الحصول عليها بإحدى الطرق الآتية :

- حل - إذا كان ذلك ممكنًا - y ضمنيًا في حدود x وفاضلها بالنسبة المتغير x . هذه المعادلة غالبًا تعطى إثبات تجريبى ماعدا لكل المعادلات البسيطة .
- التفكير في y كدالة في x ، فاضل كلا الجانبين للمعادلة المعطاة بالنسبة إلى x وصل العلاقة الناتجة للمشتقة y' . عملية التفاضل هذه معروفة باسم التفاضل الضمنى .

... ما تكون $|x| \le 3$ و $y \le 0$. هذا يصف قطع ناقص محسوب المعادلة المعطاة والذى يتكون من قوسين يتقابلان عند النقطتين $(-3, 0)$ و $(3, 0)$.

مثال 2-13 : أوجد y' ومعطى $xy + y - 2y - 1 = 0$

Example 2-13: (a) Find y', given $xy + y - 2y - 1 = 0$.

هنا

$$\left[x\frac{d}{dx}(y)+y\frac{d}{dx}(x)\right]+\frac{d}{dx}(x)-2\frac{d}{dx}(y)-\frac{d}{dx}(1)=\frac{d}{dx}(0)$$

$xy' + y + 1 - 2y' = 0$.

$$y'=\frac{1+y}{2-x}$$

(ب) أوجد y' عندما تكون $x=\sqrt{5}$ ومعطى $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

(b) Find y' when $x=\sqrt{5}$, given $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$

لدينا

$$4\frac{d}{dx}(x^2)+9\frac{d}{dx}(y^2)+\frac{d}{dx}(-36)=8x+9\frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx}=8x+18yy'=0$$

أو $y'=\frac{4x}{9y}$ عند $x=\sqrt{5}$ ، $y=\pm 4/3$ عند النقطة $(\sqrt{5}, 4/3)$ على القوس العلوى للقطع الناقص $y'=-\sqrt{5}/3$ وعند النقطة $(\sqrt{5}, -4/3)$ على القوس السفلى $y'=\sqrt{5}/3$.

• مشتقات الرتبة الأعلى Derivatives of Higher Order

يمكن الحصول على مشتقات الرتبة الأعلى بطريقتين :

• الطريقة الأولى أن تفاضل ضمنيًا مشتقة الرتبة الأقل مباشرة واستبدال y' بالعلاقة السابقة .

مثال 2-14 : من مثال (أ) 2-13

Example 2-14: From example 2-13 (a)

$$y'=\frac{1+y}{2-x}$$

إذا

$$\frac{d}{dx}(y')=y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{1+y}{2-x}\right)=\frac{(2-x)y'-(1+y)(-1)}{(2-x)^2}=\frac{(2-x)\left(\frac{1+y}{2-x}\right)+1+y}{(2-x)^2}$$

$$=\frac{2+2y}{(2-x)^2}$$

• الطريقة الثانية بإجراء التفاضل الضمني لكلا الجانبين للمعادلة المعطاة لعدد من المرات للحصول على المشتقة المطلوبة وحذف كل المشتقات ذات الرتبة الأقل . هذه الطريقة مفضلة فقط عند إيجاد مشتقة ذات رتبة أعلى لنقطة معطاة .

مثال 2-15 : أوجد قيمة ''y عند النقطة (1 ,1-) للمنحنى $x^2y + 3y - 4 = 0$

Example 2-15: Find the value of y" at the point (-1, 1) of the curve

$$x^2y + 3y - 4 = 0$$

...ـل ضمنيًا بالنسبة إلى x مرتين ونحصل على

$$(x^2y' + 2xy) + 3y' = 0$$

$$[(x^2y'' + 2xy') + (2xy' + 2y)] + 3y'' = 0$$

...ض $x = -1$ ، $y = 1$ في العلاقة الأولى لنحصل على $y' = \frac{1}{2}$. ثم نعوض

x ، $y = 1$ ، $y' = \frac{1}{2}$ في العلاقة الثانية لنحصل على $y'' = 0$.

• مسائل محلولة Solved Problems

مسألة محلولة 2-1 : معطى $y = f(x) = x^2 + 5x - 8$. أوجد Δy و $\Delta y/\Delta x$

...ندنا تتغير x من $x_0 = 1$ إلى $x_1 = x_0 + \Delta x = 1.2$.

Solves problem 2-1 : Given . $y = f(x) = x^2 + 5x - 8$, find Δy and $\Delta y/\Delta x$ as x changes from $x_0 = 1$ to $x_1 = x_0 + \Delta x = 1.2$.

الحل : $\Delta x = x_1 - x_0 = 1.2 - 1 = 0.2$

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1.2) - f(1) = 0.56 - (-2) = 1.22$. لذلك .

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.44}{0.2} = 7.2$$

مسألة محلولة 2-2 : فاضل

Solves problem 2-2 : Differentiate

$$y = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} = x^{-1} + 3x^{-2} + 2x^{-3}$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx}=-x^{-2}+3(-2x^{-3})+2(-3x^{-4})$$
$$=-x^{-2}-6x^{-3}-6x^{-4}$$
$$=-\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x^3}-\frac{6}{x^4}$$

مسألة محلولة 2-3 : فاضل

Solves problem 2-3 : Differentiate

$$s=(t^2-3)^4$$

الحل :

$$\frac{ds}{dt}=4(t^2-3)^3(2t)=8t(t^2-3)^3$$

مسألة محلولة 2-4 : فاضل

Solves problem 2-4 : Differentiate

$$f(x) = x^2 + x^4 + x^6$$

الحل :

$$f'(x)=\frac{d}{dx}(x^2+x^4+x^6)=\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(x^4)+\frac{d}{dx}(x^6)$$
$$= 2x+4x^3+6x^5$$

مسألة محلولة 2-5 : فاضل

Solves problem 2-5 : Differentiate

$$f(x)=\frac{(x^2+2)}{x^2},\ x>0$$

الحل :

$$f'(x)=\frac{(x^2)(2x)-(x^2+2)(2x)}{(x^2)^2}=\frac{2x^3-2x^3-4x}{x^4}=-\frac{4x}{x^4}$$

مسالة محلولة 2-6 : معطى $f(x) = 1 - x^3$. أوجد $f'(-4)$ و $f'(4)$.

Solves problem 2-6 : Given $f(x) = 1 - x^3$, find $f'(-4)$ and $f'(4)$

الحل : أولاً يجب إيجاد تفاضل الدالة f(x)

$$f'(x) = -3x^2$$

إذن

$$f'(-4) = -3(-4)^2 = -3 \cdot 16 = -48$$

$$f'(4) = -3(4)^2 = -3 \cdot 16 = -48$$

مسالة محلولة 2-7 : فاضل الدالة :

Solves problem 2-7 : Differentiate the function:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$$

الحل : لابد أن نستخدم قاعدة خارج القسمة لنحصل على مشتقة الدالة f(x) .

$$f'(x) = \frac{(dx^2 + ex + f)(2ax + b) - (ax^2 + bx + c)(2dx + e)}{(dx^2 + ex + f)^2}$$

مسألة محلولة 2-8 : عين معدل التغير في مساحة دائرة بالنسبة إلى نصف قطرها R . أيضًا أوجد معدل التغير عند R = 5 .

Solves problem 2-8 : Determine the rate of change of the area of a circle with respect to its radius, R. Also, evaluate the rate of change when R = 5.

الحل : علاقة مساحة دائرة بنصف قطرها تحددها الدالة

$$A = \pi R^2$$

لذلك ، معدل التغير في مساحة دائرة في حدود نصف قطرها R هو

$$\frac{dA}{dR}=2\pi R$$

والذى يمثل محيط دائرة . عند $R=5$.

$$\frac{dA}{dR}=2\pi R=2\pi(5)=10\pi$$

مسألة محلولة 9-2 : عين معدل التغيير للارتفاع h في حدود
القطر R لحجم أسطوانة دائرية بفرض ثبات حجمها مع زيـ
معادلة حجم الأسطوانة الدائرية هى $V=\pi R^2 h$.

problem 2-9 : Determine the rate of change of the height h, in
f the radius, R, for the volume of a circular cylinder assuming
nt volume as R increases. The formula of a circular cylinder is
^{2}h .

$$V=\pi R^2 h$$

الحل : لحساب تغير حجم الأسطوانة بالنسبة إلى نصف القطر
التفاضل التالى

$$\frac{dV}{dR}=(\pi R^2)\frac{dh}{dR}+h\frac{d}{dR}(\pi R^2)=(\pi R^2)\frac{dh}{dR}+2\pi Rh$$

ومعطى أن الحجم V يبقى ثابتاً

$$\frac{dV}{dR}=0$$ إذن

$$\pi R^2\frac{dh}{dR}+2\pi Rh=0$$

بالقسمة على πR ومعطى :

$$R\frac{dh}{dR}+2h=0$$

وبالحل لقيمة $\frac{dh}{dR}$:

$$\frac{dh}{dR}=-\frac{2h}{R}$$

مسألة محلولة 2-10 : عين $\frac{dy}{dx}$ ومعطى :

Solves problem 2-10 : Determine $\frac{dy}{dx}$ given:

$$u=\frac{1}{x+1} \qquad \text{و} \qquad y=4u^2+4$$

الحل : هـذا تطبيق لقاعدة التسلسل . ولحساب $\frac{dy}{dx}$ نحتاج أن نحسب $\frac{dy}{du}$ و $\frac{du}{dx}$.

$$\frac{dy}{du}=8u=\frac{8}{x+1}\,;\ \frac{du}{dx}=-\frac{1}{(x+1)^2}$$

إذن باستخدام قاعدة التسلسل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\left(\frac{8}{x+1}\right)\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)=-\frac{8}{(x+1)^3}$$

الفصل الثالث
الحد الأقصى والحد الأدنى
Maxima and Minima

فى هذا الفصل :

- ✔ **المسات .**
- ✔ **الأعمدة .**
- ✔ **زاوية التقاطع .**
- ✔ **قيم الحد الأقصى والحد الأدنى .**
- ✔ **مسائل تطبيقية على الحد الأقصى والحد الأدنى .**
- ✔ **مسائل محلولة .**

• المماسات Tangents

إذا كانت للدالة $f(x)$ مشتقة محدود $f'(x_0)$ عند $x = x_0$ ، يكون للمنحنى $y = f(x)$ مماس عند $P_0(x_0, y_0)$ وميله هو

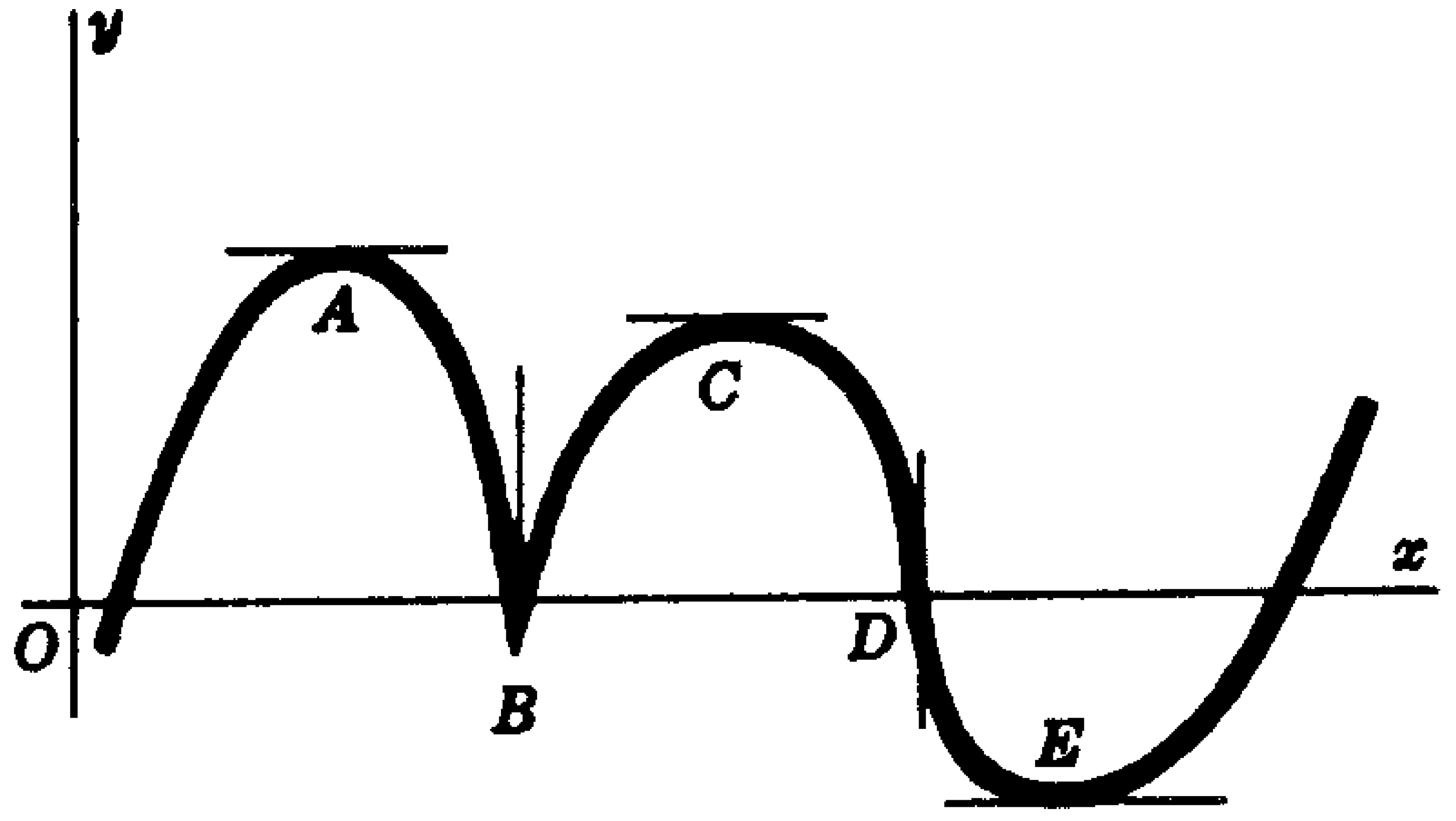
$$m = \tan \theta = f'(x_0)$$

إذا كانت $m = 0$ ، يكون للمنحنى مماس أفقى معادلته $y = y_0$ عند P_0 ، مثل عند النقاط E, C, A فى شكل 1-3 . أو بطريقة أخرى معادلة المماس هى

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة متصلة عند $x = x_0$ لكن $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \infty$ يكون

للمنحنى مماس رأسى معطى بالمعادلة $x = x_0$ مثل النقط B و D فى شكل 1-3 .



شكل 1-3

• الأعمدة Normals

العمودى على المنحنى عند إحدى نقطه هو الخط الـذى يمـر بالنقطـة ومتعامد على المماس عند هذه النقطة . لذلـك إذا كـان m هـو ميـل المماس إذن -1/m هو ميل العمودى . معادلة العمودى عند $P_0(x_0, y_0)$ هى

لو كان المماس أفقيًا $\quad x = x_0$

لو كان المماس رأسيًا $\quad y = y_0$

أو غير ذلك $\quad y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$

مثال 1-3 : أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى

$y = x^3 - 2x^2 + 4$ عند النقطة (2, 4)

Example 3-1: Find the equations of the tangent and normal to

$y = x^3 - 2x^2 + 4$ at (2, 4)

$f'(x) = 3x^2 - 4x$ إذن ميل المماس عند (2, 4) هو $m = f'(2) = 4$

معادلة المماس هى $y - 4 = 4(x - 2)$ أو $y = 4x - 4$

معادلة العمودى هى

$$y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2) \quad \text{أو} \quad x + 4y = 18$$

مثال 3-2 : أوجد معادلة الخط الذى يحتوى على النقطة $(2, -2)$ ويمس القطع الزائد $x^2 - y^2 = 16$.

Example 3-2: Find the equations of the line containing the point (2, -2), which is tangent to the hyperbola $x^2 - y^2 = 16$.

دع $P_0(x_0, y_0)$ هى نقطة التماس . إذن P_0 تقع على القطع الزائد ، إذن

$$x_o^2 - y_o^2 = 16 \qquad (3\text{-}1)$$

وأيضًا :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

إذن عند (x_0, y_0) ميل الخط الواصل بين P_0 و $(2, -2)$ هو

$$m = \frac{x_o}{y_o} = \frac{y_o - (-2)}{x_o - 2}$$

إذن

$$2x_0 + 2y_0 = x_0^2 - y_0^2 = 16 \quad \text{أو} \quad x_0 + y_0 = 8 \qquad (3\text{-}2)$$

نقطة التماس $(5, 3)$ هو حل المعادلة (3-1) والمعادلة (3-2) فى نفس الوقت . لذلك معادلة المماس هى

$$y - 3 = \frac{5}{3}(x - 5)$$

أو

$$5x - 3y = 16$$

• زاوية التقاطع Angle of Intersection

زاوية التقاطع لمنحنيين تعرف بأنها الزاوية بين المماسين لهذين المنحنيين عند نقطة تقاطعهما .

لتعين زوايا التقاطع لمنحنيين :

1 ـ حل المعادلات معًا لإيجاد نقط التقاطع .

2 ـ أوجد الميل m_1 و m_2 لمماسى المنحنيين عند نقطة التقاطع .

3 ـ إذا كان $m_1 = m_2$ تكون زاوية التقاطع $\phi = 0$. إذا كان $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ تكون زاوية التقاطع $\phi = 90°$.

أو من ناحية أخرى يمكن إيجادها من

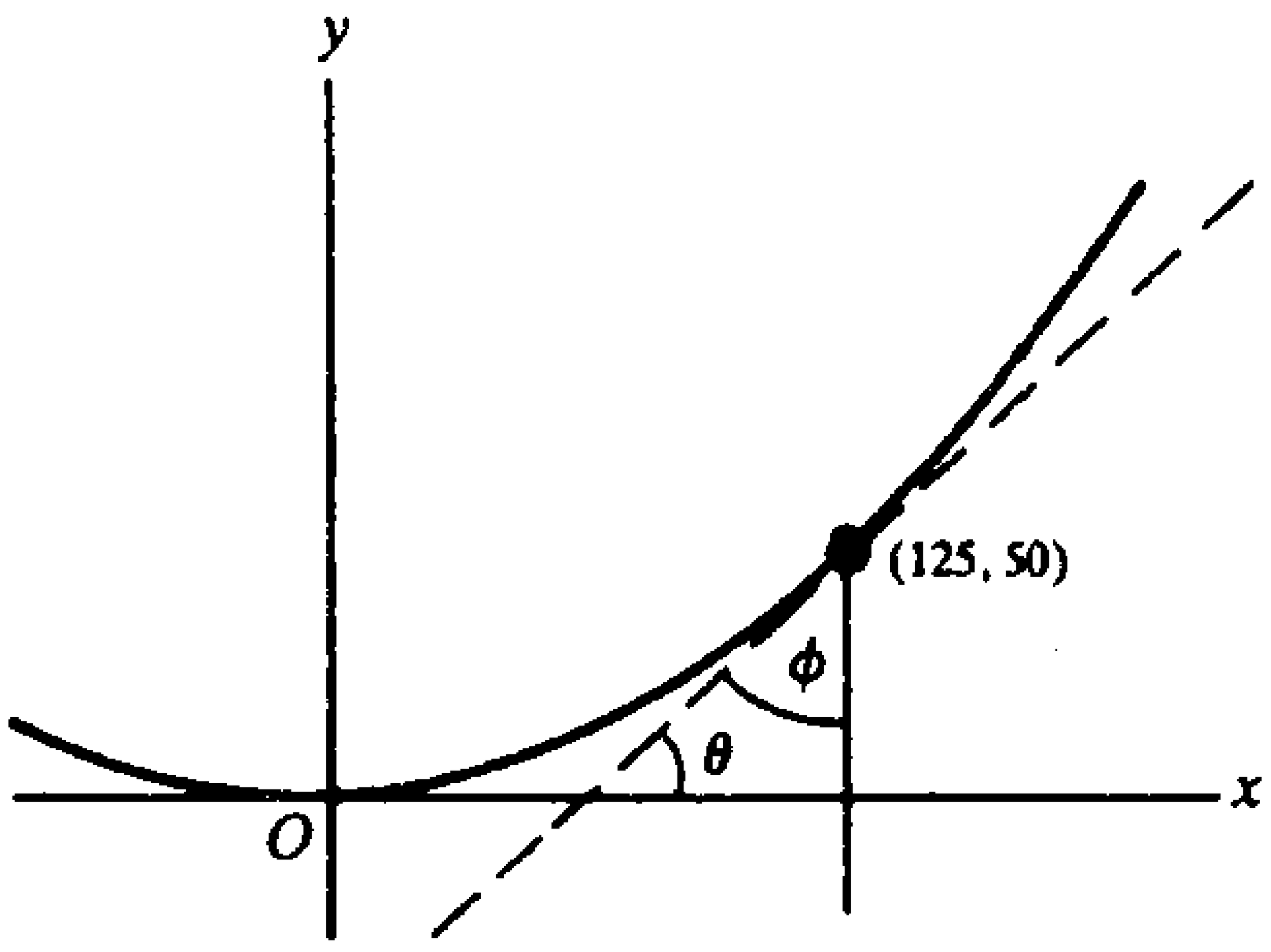
$$\tan \varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

حيث إن ϕ هى زاوية التقاطع الحادة عند $\tan \phi > 0$ و $180° - \phi$ هى زاوية التقاطع الحادة عند $\tan \phi < 0$.

مثال 3-3 : كابل معين لكوبرى معلق متصل بأعمدة تثبيت تبعد مسافة 250 ft . لو علق على شكل قطع مكافئ وأسفل نقطة تبعد 50 ft عن نقطة التعليق . أوجد الزاوية بين الكابل والعمود .

Example 3-3: A cable of a certain suspension bridge is attached to supporting pillars 250 feet (ft) apart. If it hangs in the form of a parabola with the lowest point 50 ft below the point of suspensions, find the angle between the cable and the pillar.

خذ نقطة الأصل عند قمة القطع المكافئ شكل 3-2 . معادلة القطع المكافئ هى $y = (2/625)x^2$ و $y' = 4x/625$ عند $(125, 50)$ تكون $m = 4(125)/625 = 0.80$ و $\theta = 38° \ 40'$. حيث أن الزاوية المطلوبة $\phi = 90° - \theta = 51° \ 20'$.



شكل 3-2

• قيم الحد الأقصى والحد الأدنى

Maximum and Minimum Values

الدوال التزايدية والدوال التناقصية

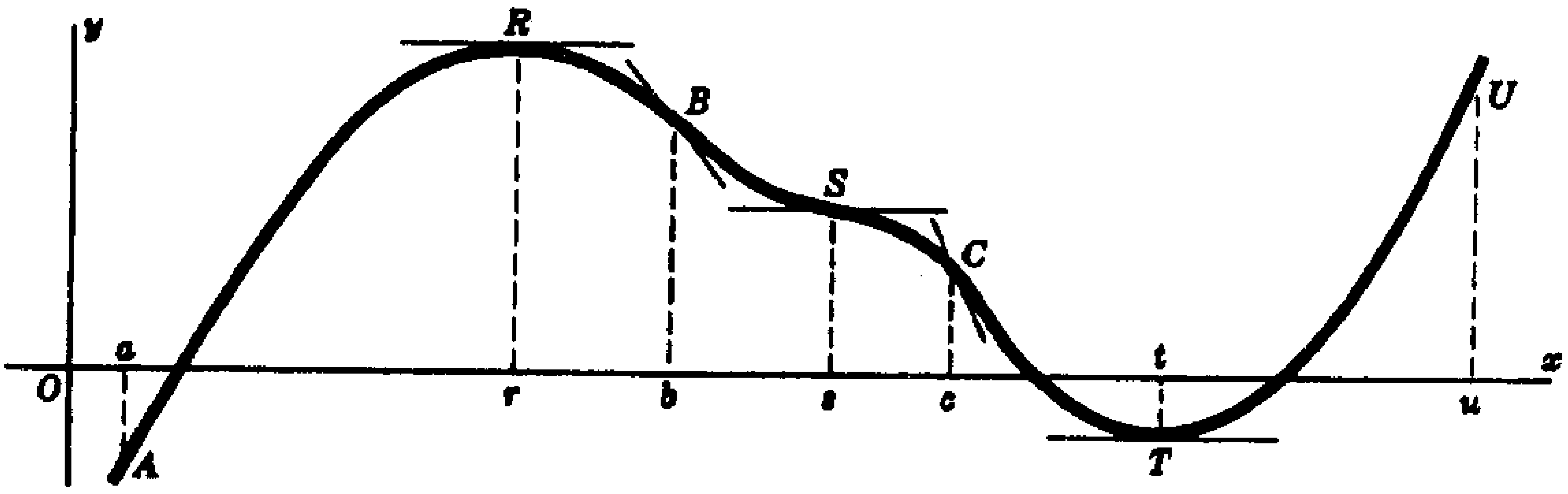
Increasing and Decreasing Functions

الدالة $f(x)$ تسمى **تزايدية** فـى الفـترة المفتوحـة إذا كـان $u < v$ متضمنـة $f(u) < f(v)$ لكل قيم u و v فى الفترة . الدالة $f(x)$ تسمى تزايدية عند $x = x_0$ إذا كانت $f(x)$ تزداد فى الفترة المفتوحة محتويـة x_0 . وبـالمثل الدالـة $f(x)$ تسمى **تناقصية** فى الفترة المفتوحة إذا كان $u > v$ متضمنة $f(u) > f(v)$ لكل قيم u و v فى الفترة . الدالة $f(x)$ تسمى تناقصية عند $x = x_0$ إذا كانت $f(x)$ تتناقص فى الفترة المفتوحة محتوية x_0 .

إذا كانت $f'(x_0) > 0$ إذن ممكن أن نبين أن $f(x)$ هى دالة تزايدية عند $x =$ ، وبالمثل إذا كانت $f'(x_0) < 0$ ، إذن تكون $f(x)$ دالة تناقصية عند $x =$ ، إذا كانت $f'(x_0) = 0$ ، إذن $f(x)$ هى دالة مستقرة .

فى شكل 3-3 ، المنحنى $y = f(x)$ يرتفـع (الدالـة تزايديـة) فـى الفـترة $a < x < r$ و $t < x < u$ ويهبط المنحنى (الدالة تناقصية) فى الفترة $r < x < t$. الدالة مستقرة عند $x = r$ و $x = s$ و $x = t$ ويكون للمنحنى ممـاس أفقـى عند النقط T, S, R . قيم $x(t, x, r)$ عندما تكون الدالـة مسـتقرة [أى أن

$[f'(x_0) = 0]$ هى قيم حرجة للدالة والنقـط المقابلـة لـها (T, S, R) علـى المنحنى تسمى النقاط الحرجة للمنحنى .



شكل 3-3

الحد الأقصى النسبى والحد الأدنى النسبى
Relative Maximum and Minimum

Values of a Function قيم الدالة

الدالة $f(x)$ يقال أن لها حد أقصى نسبى عند $x = x_0$ لـو أن $f(x_0) \geq f(x)$ لكل قيم x فى بعض الفترة المفتوحة المحتوية على x_0 ، بمعنى أنـه إذا كانت قيمة $f(x_0)$ أكبر من أو تســاوى قيمـة $f(x)$ لكـل النقـط القريبـة . ويكون للدالة $f(x)$ حدًا أدنى نسبى عند $x = x_0$ لو أن $f(x_0) \leq f(x)$ لكـل قيم x فى بعض الفترات المفتوحة المحتوية على x_0 ، أى أنه إذا كانت قيمة $f(x_0)$ أقل من أو تساوى قيمة $f(x)$ عند كل النقط القريبة فى شكل 3-3 ، $R(r, f(r))$ هى النقطة القصوى النسبية للمنحنى حيـث إن $f(r) > f(x)$ عند أى جدار صغيرة كما فى $0 < |x - r| < \delta$. نقول أن $y = f(x)$ لـها حد أقصى نسبى قيمته $(=f(r))$ عند $x = r$.

فى نفس الشكل ، $T(t, f(t))$ هى النقطة الدنيا النسبية للمنحنى ، حيث إن $f(t) > f(x)$ عند أى جدار صغير كما فى $0 < |x - t| < \delta$. نقول أن $y = f(x)$ لها حد أدنى نسبة قيمته $(= f(t))$ عند $x = t$. لاحظ أن R تصـل القوس AR الذى يرتفع $(f'(x) > 0)$ والقوس RB الذى يهبط $(f'(x) < 0)$ ،

بينما T تصل القوس CT الـذى يـهبط ($f'(x) < 0$) والقـوس TU الـذى يرتفع ($f'(x) > 0$) عند S . القوسان BS و SC كلاهما يهبطان ومتصلان عندها النقطة S ليست نقطة قصوى نسبية ولا نقطة أدنى نسبية للمنحنى .

إذا كانت f(x) قابلة للتفاضل فى $a \le x \le b$ وإذا كان f(x) لـهـا حـد أقصى (أو أدنى) عند $x = x_0$ حيث إن $a < x_0 < b$ ، إذا $f'(x_0) = 0$.

اختبار المشتقة الأولى First Derivative Test

الخطوات التالية يمكن أن تسـتخدم قيـم الحـد الأقصـى (أو الأدنـى) النسبى (للتيسير سوف نسميهم أقصى (أو أدنى) قيمة) للدالة f(x) معًـا مع المشتقة الأولى التى تكون متصلة :

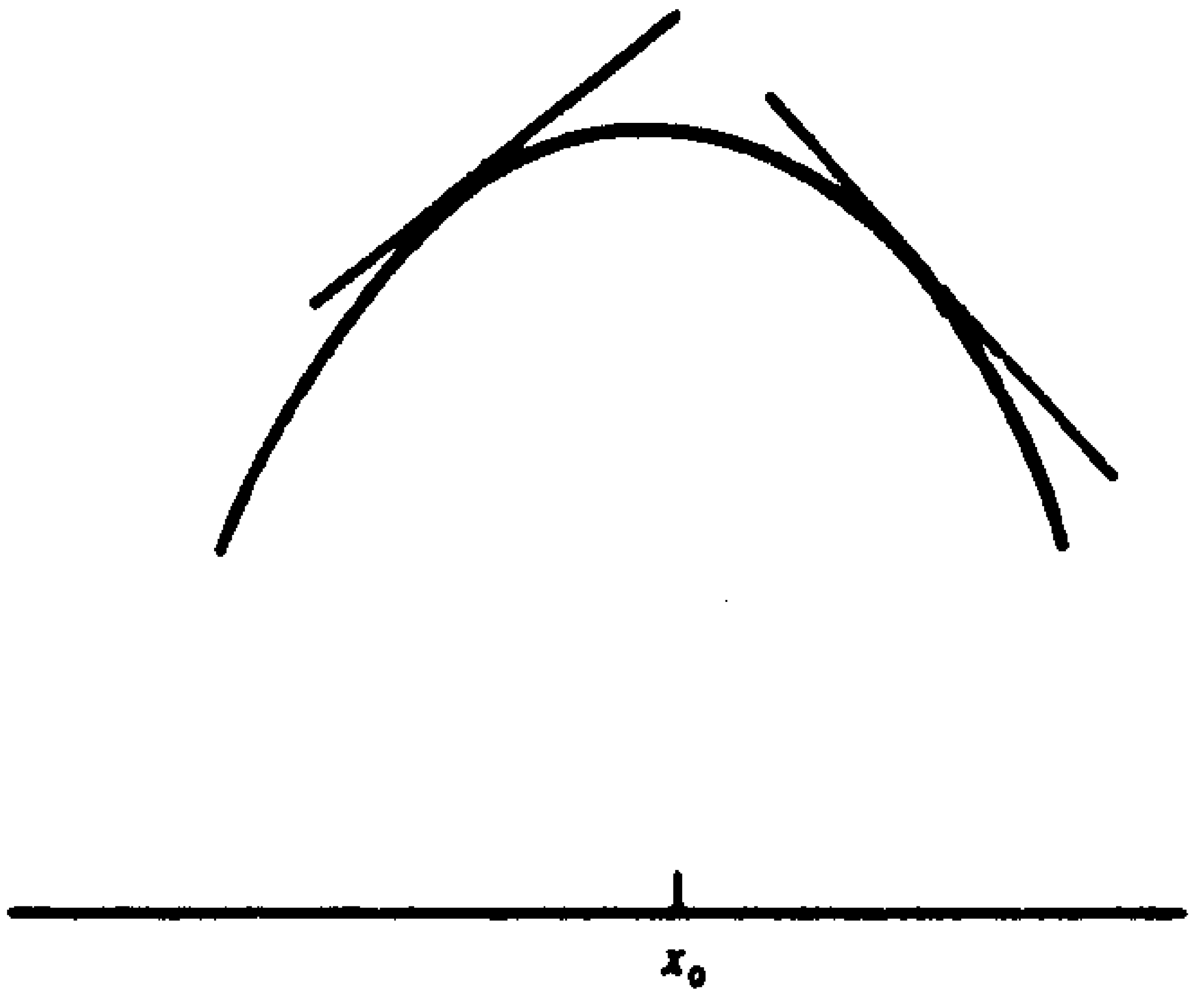
1 - حل $f'(x) = 0$ للقيم الحرجة .

2 - وقع القيم الحرجة على محور x وبذلك يتحدد عدد من الفترات .

3 - عين إشارة $f'(x)$ على كل فترة .

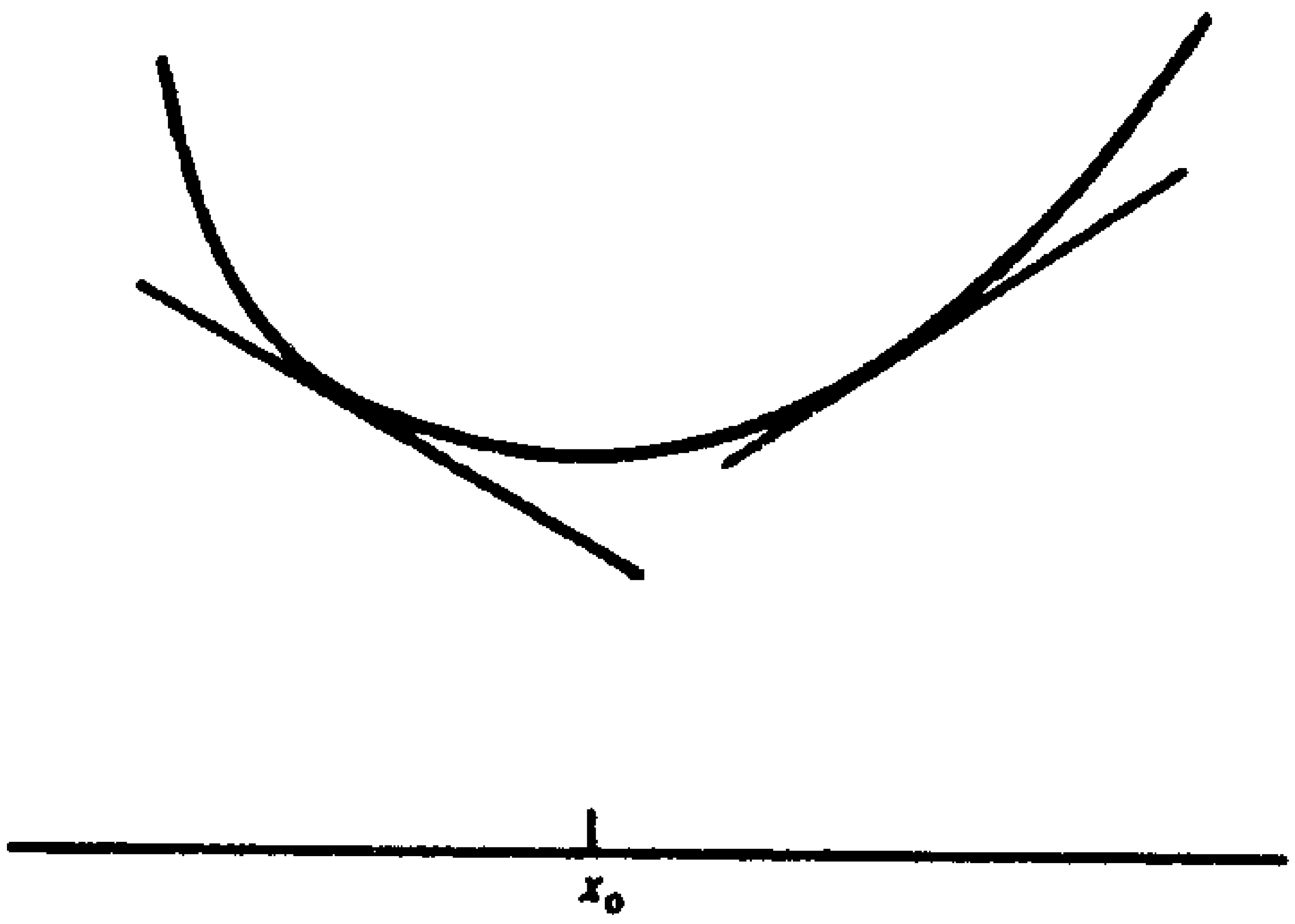
4 - دع x تتزايد خلال كل قيمة حرجة $x = x_0$ ، إذن

(أ) f(x) لها قيمة قصوى $f(x_0)$،لو $f'(x)$ تغيرت من + إلى - (شكل 3-4) .



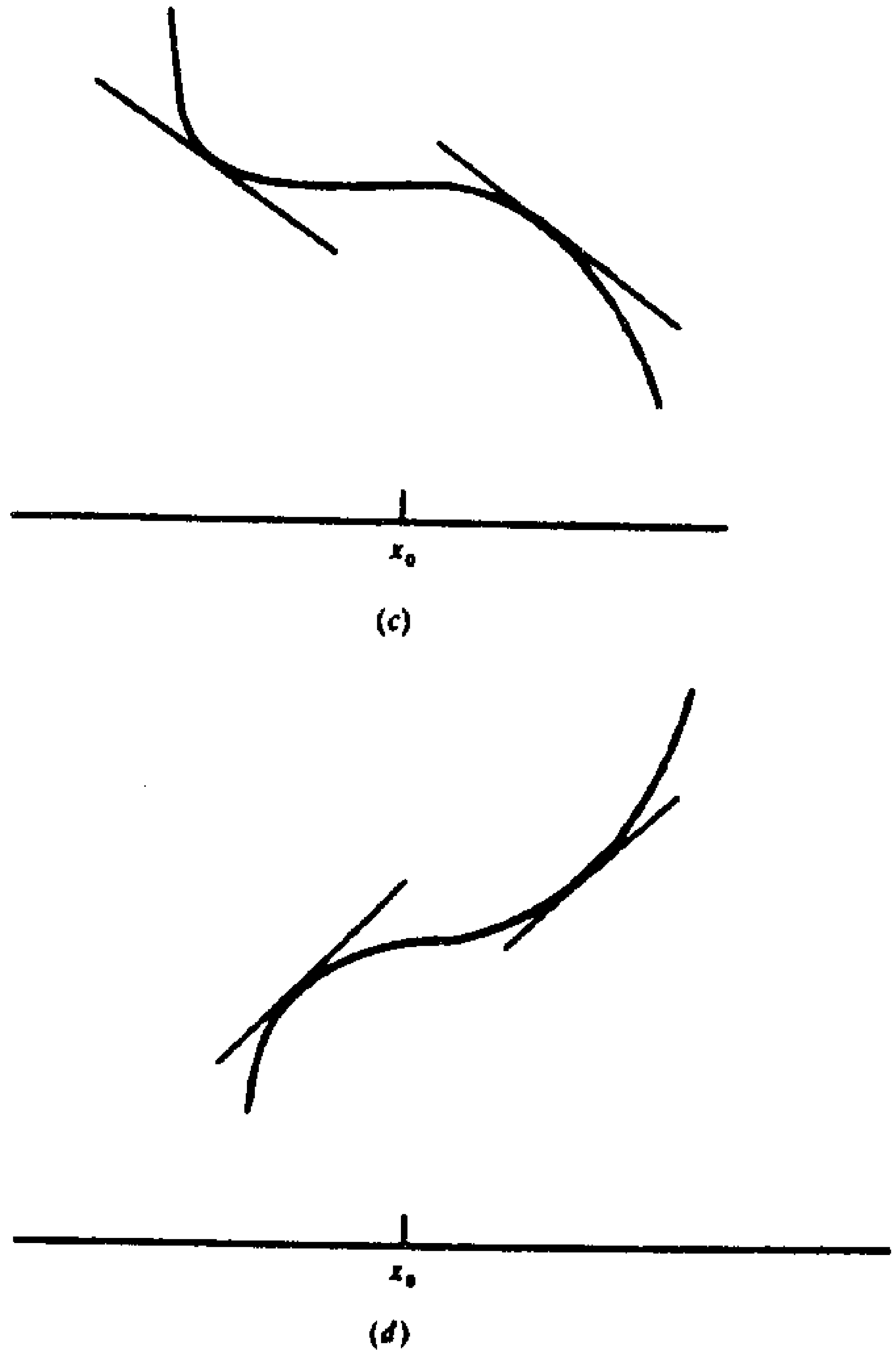
شكل 3-4 *(a)*

(ب) f(x) يكون لها الأدنى قيمة $f(x_0)$ ، لو $f'(x)$ تغيرت مـن - إلـى + (شكل 3-5) .



شكل 3-5 *(b)*

(جـ) لا يكون للدالة f(x) أعلى أو أدنى قيمة عند $x = x_0$ لـو $f'(x)$ لا تغير إشارتها . (شكل 3-6) .



شكل 3-6

مثال 3-4 : معطى :

$$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+8$$

أوجـد (أ) النقطـة الحرجـة ، (ب) الفـترات التـى فيـها y تزايديـة وتناقصية ، (جـ) أقصى وأدنى قيم للدالة y .

Example 3-4: Given:

$$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+8$$

find (a) the critical points; (b) the intervals on which is increasing and decreasing; and (c) the maximum and minimum values of y.

(أ) $y' = x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$ بوضع $y' = 0$ يعطى القيم الحرجة $x = -3$ ، $x = 2$. النقط الحرجة هى $(-3, 43/2)$ و $(2, 2/3)$.

(ب) عندما تكون y' موجبة ، تكون y تزايدية وعندما تكون y' سـالبة تكون y تناقصية .

عند $x < -3$ مثلاً $x = -4$ ، $y' = (-)(-) = +$ و y تزايدية .

عند $-3 < x < 2$ مثلاً ، $x = 0$ ، $y' = (+)(-) = -$ و y تناقصية .

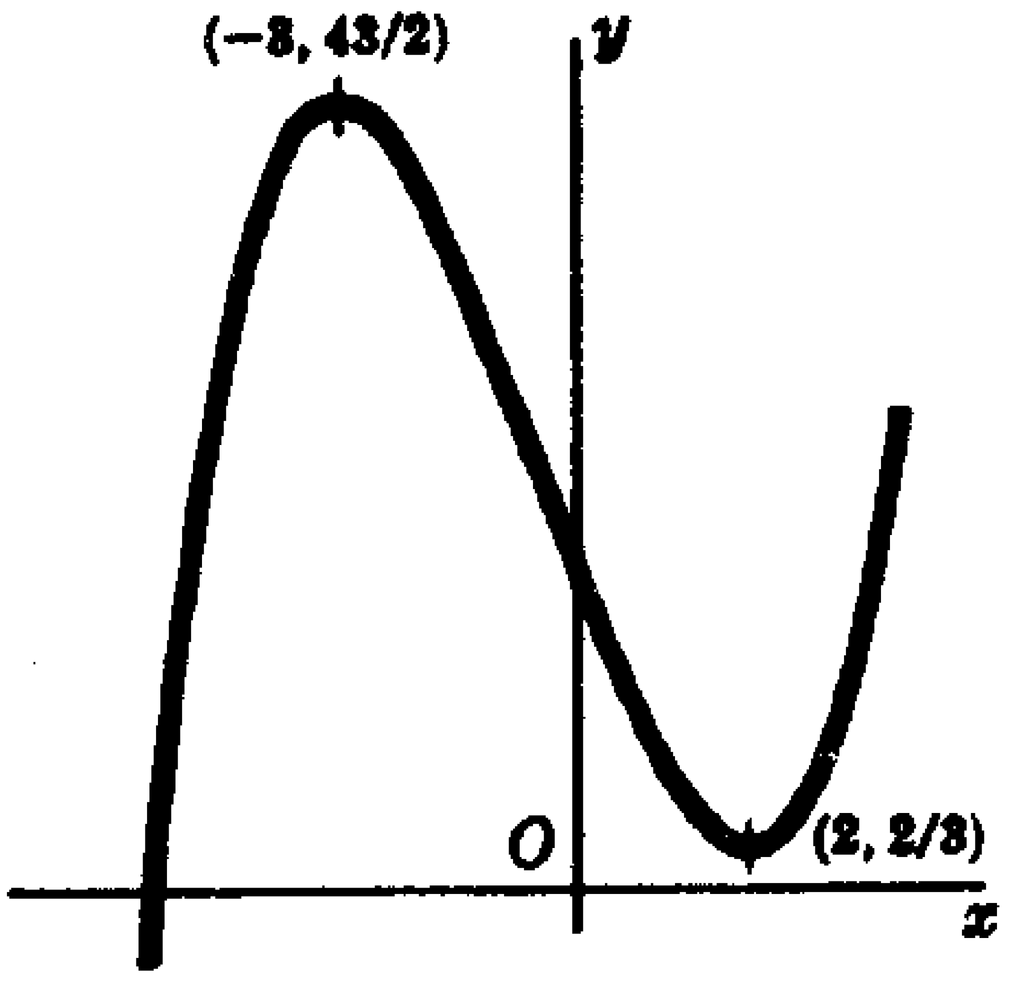
عند $x > 2$ مثلاً ، $x = 3$ ، $y' = (+)(+) = +$ و y تزايدية .

هذه النتائج موضحة بشكل 3-7 .

تذكر

الدالة f(x) يمكن أن يكون لها قيم أقصى وأدنى $f(x_0)$ مع عـدم وجـود $f(x_0)$. قيم $x = x_0$ التى تعرف f(x) ولكن $f'(x)$ غير موجودة تسمى أيضًا القيم الحرجة للدالـة . كـل هـذا مع القيـم التـى تجعـل $f'(x) = 0$. تستخدم كقيم حرجة لاختبار المشتقة الأولى .

$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$y' = +$ y increases تتزايد		$y' = -$ y decreases تتناقص		$y' = +$ y increases تتزايد



شكل 3-7

(جـ) نختبر القيم الحرجة x = -3 ، x = 2 للحد الأقصى والأدنى كلما تزداد x خلال 3- ، 'y تغير إشارتها من + إلى - ، لذلك عند x = -3 ، y لها أقصى قيمة 43/2 . كلما تتزايد x خلال 2 ، تتغير إشارة 'y من - إلى + إذن عند x = 2 ، y لها أدنى قيمة 2/3 .

مثال 3-5 : اختبر |y = |x لأقصى وأدنى قيم .

Example 3-5: Examine y = |x| for maximum and minimum values.

الدالة معرفة فى كل مكان ولها مشتقة لكل قيم x ما عدا x = 0 . لذلك x = 0 هى قيمة حرجة . لقيم x < 0 تكون f'(x) = -1 ولقيم x > 0 تكون f'(x) = +1 . الدالة لها قيم أدنى (0 =) عند x = 0 .

التقعر Concavity

يسمى قوس من المنحنى y = f(x) بالمقعر لأعلى لو كان القوس عند كل نقطة يقع فوق مماس هذه النقطة . كلما زادت x ، تكون f'(x) إما لها نفس الإشارة وتزداد (فى الفترة b < x < s للشكل 3-3) أو تغير

الإشارة من ســالب إلــى موجــب (فــى الفــترة $c < x < u$) . فــى كلتــا الحالتين يزداد ميل $f'(x)$ لذلك $f''(x) > 0$.

يسمى القوس من المنحنى $y = f(x)$ بالمقعر لأسفل إذا كانت كل نقط القوس تقع أسفل المماس لهذه النقطة . كلما زادت x تكون $f'(x)$ إما لها نفس الإشارة وتقل (فى الفترة $s < x < c$ فــى شكــل 3-3) أو تغــير الإشارة من موجب إلى سالب (فى الفترة $a < x < b$) فى كلتا الحــالتين الميل $f'(x)$ يقل و $f''(x) < 0$.

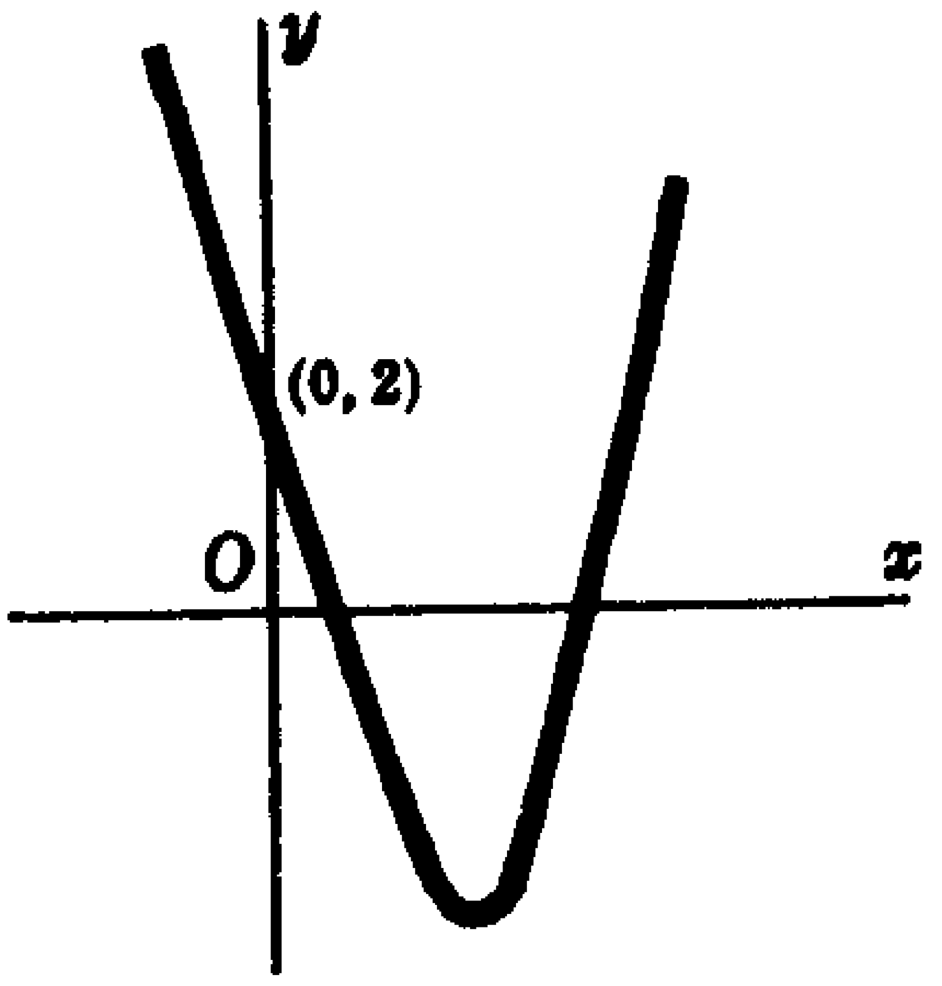
نقطة الانقلاب Point of Infection

نقطة الانقلاب هى نقطة يتغير عندها المنحنى من مقعر لأعلى إلى مقعــر لأسفل أو العكس الصحيح . فى شكل 3-3 نقاط الانقلاب هى B, S, C . المنحنى $y = f(x)$ له أحدى نقاطه $x = x_0$ كنقطة انقلاب لو $f''(x_0) = 0$ أو غير معرفة و $f''=(x)$ تغير إشارتها بين النقط $x < x_0$ و $x > x_0$. (الشرط الأخير يمكن كتابته هكذا $f'''(x_0) \neq 0$ عندما تكون $f'''(x_0)$ موجودة) .

مثال 3-6 : اختبر $y = x^4 - 6x + 2$ من ناحية التقعر ونقاط الانقلاب .

Example 3-6: Examine $y = x^4 - 6x + 2$ for concavity and points of inflection.

الرسم البيانى للدالة موضح بالشكل 3-8 .



شكل 3-8

لدينا $y'' = 12\,x^2$. نقاط الانقلاب الممكنة هى عند $x = 0$. فى الفترات $x < 0$ و $x > 0$ ، $y'' = +$ ، لذلك الأقواس على جانبى $x = 0$ تكون مقعرة لأعلى لذلك النقطة $(0, 2)$ ليست نقطة انقلاب .

اختبار المشتقة الثانية Second Derivative Test

هناك اختبار ثانى للحد الأعلى والحد الأدنى .

1 ـ حل $f'(x_0)$ وعين أين $f'(x_0)$ تكون غير موجودة للقيم الحرجة .

2 ـ لكل قيمة حرجة $x = x_0$.

$f(x)$ لها حد أقصى $f(x_0)$ لو $f''(x_0)$ (شكل 3-4) .

$f(x)$ لها حد أدنى $f(x_0)$ لو $f''(x_0) > 0$ (شكل 3-4) .

يفشل الاختبار لو $f''(x_0) = 0$ أو غير معرفة (شكل 3-6) . فى هذه الحالة ، لابد من استخدام اختبار المشتقة الأولى .

مثال 3-7 : $f(x) = x(12 - 2x)^2$ للحد الأعلى والحد الأدنى باستخدام طريقة المشتقة الثانية .

Example 3-7: Examine $f(x) = x(12 - 2x)^2$ for maxima and minima using the second-derivative method.

هنا $f'(x) = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x - 2)(x - 6)$ لذلك القيم الحرجة عند $x = 2$ ، $x = 6$ أيضًا $f''(x) = 12(2x - 8) = 24(x - 4)$. لأن $f''(2) < 0$ ، $f(x)$ لها حد أقصى $(= 128)$ عند $x = 2$. لأن $f''(6) > 0$ ، $f(x)$ لها حد أدنى $(= 0)$ عند $x = 6$.

• مسائل تطبيقية على الحد الأقصى والحد الأدنى

Applied Problems Involving Maxima and Minima

لحساب القيم المطلقة للحد الأعلى والحد الأسفل فى فترة مغلقة [a, b] ، نستخدم الطريقة الآتية (نبدل بأى من اختبار المشتقة الأولى أو الثانية) : أولاً نعرف كل القيم الحرجة C . ثم نعين قيمة الدالة $y = f(x)$ عند كل نقط النهاية $f(a)$, $f(b)$ وعند كل نقطة حرجة $f(c)$. أخيرًا نقارن هذه القيم لإيجاد قيم الحد الأعلى والحد الأدنى .

مثال 3-8 : قسم العدد 120 إلى جزئين حيث إن حاصل ضرب P الجزء الأول ومربع الجزء الثانى يكون الحد الأعلى .

Example 3-8: Divide the number 120 into two parts such that the product P of one part and the square of the other is a maximum.

دع x هى الجزء الأول و $120 - x$ هى الجزء الثانى ، إذن $P = (120 - x)x^2$ و $0 \le x \le 120$ حيث إن $dP/dx = 3x(80 - x)$ ، القيم الحرجة هى $x = 0$ ، $x = 80$. الآن $P(0) = 0$ ، $P(80) = 256000$ و $P(120) = 0$. إذن قيم الحد الأعلى تحدث عند $x = 80$. الجزئين المطلوبين هما 80 ، 40 .

مثال 3-9 : وعاء أسطوانى بقاعدة دائرية حجمه 64 بوصة مكعبة (in^3) . أوجد أبعاده لكى تكون كمية المساحة السطحية للمعدن المطلوب له أقل ما يمكن عندما يكون الوعاء (أ) مفتوح ، (ب) مغلق . دع r و h على الترتيب هما نصف قطر القاعدة الارتفاع بالبوصة ، A هى المساحة السطحية للمعدن و V حجم الوعاء .

Example 3-9: A cylindrical container with a circular base is to hold 64 cubic inches (in^3). Find its dimensions so that the amount (surface area). of metal required is a minimum when the container is (a) an open cup and (b) a closed can.

(أ) $V = \pi r^2 h = 64\ in^3$ و $V = 2\pi rh + \pi r^2$. لاستنتاج A كدالة في أحد المتغيرات ، نحل h فـي أول عـلاقة (لأن ذلك أسـهل) ثـم نعـوض في العلاقة الثانية . ونحصل على .

$$A = 2\pi r \frac{64}{\pi r^2} + \pi r^2 = \frac{128}{r} + \pi r^2 \quad \text{و} \quad \frac{dA}{dr} = -\frac{128}{r^2} + 2\pi r = \frac{2(\pi r^3 - 64)}{r^2}$$

والقيمة الحرجة $r = 4/\sqrt[3]{\pi}$ إذا $h = 64/\pi r^2 = 4/\sqrt[3]{\pi}$ إذن $r = h = 4/\sqrt[3]{\pi}$

الآن $dA/dr > 0$ فـي الجهـة اليمنى مـن القيمة الحرجـة و $dA/dr < 0$ في الجهة اليسرى من القيمة الحرجة . لذا باختبار المشتقة الأولـى يكـون لدينا الحد الأدنى النسبى . وحيث إنه لا يوجد قيمة حرجة أخرى يكـون الحد الأدنى النسبى هو قيمة مطلقة .

(ب) ويوجد هنا مرة أخرى $V = \pi r^2 h = 64\ in^3$ ، ولكن

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(64/\pi r^2) + 2\pi r^2 = 128/r + 2\pi r^2$$

حيث إن :

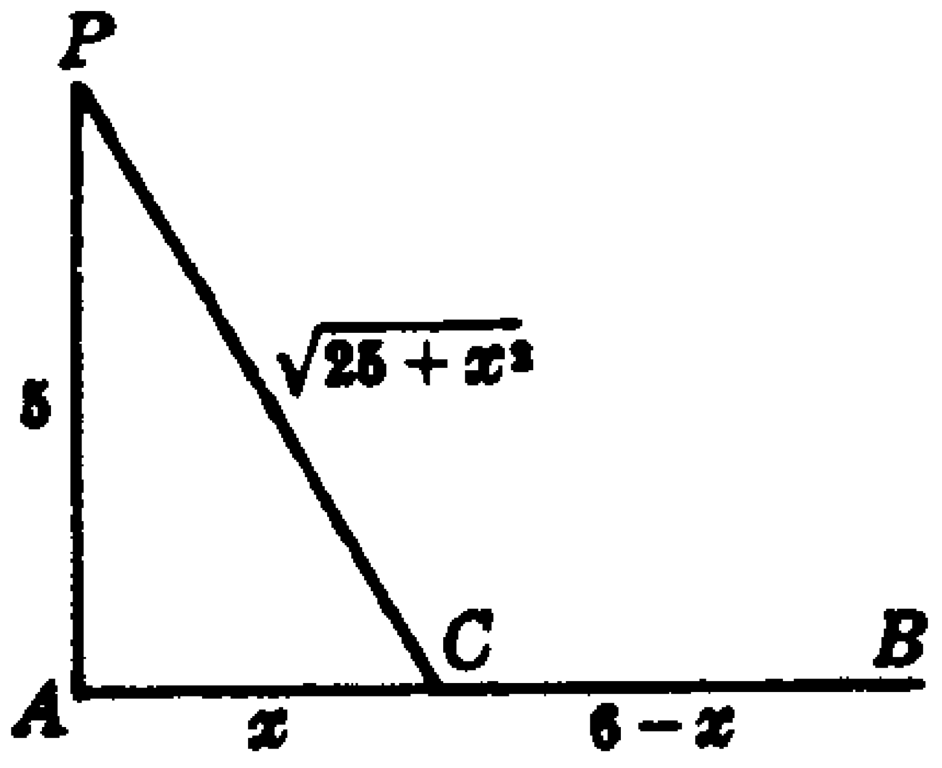
$$\frac{dA}{dr} = -\frac{128}{r^2} + 4\pi r = \frac{4(\pi r^3 - 32)}{r^2}$$

والقيمة الحرجة $r = 2\sqrt[3]{4/\pi}$. إذن $h = 64/\pi r^2 = 2\sqrt[3]{4/\pi}$ لذلك . $h = 2r = 4\sqrt[3]{4/\pi}$. وجدنا قيمة مطلقة للحد الأدنى كما بينا في الجزء (أ) .

مثال 3-10 : رجل في قارب تجديف عند P شكـل 3-9 . علـى بعـد 5 (mi) أميال من أقرب نقطة A على الشاطئ ويريد أن يصل للنقطة B على الشاطئ وعلى مسافة (mi) 6 من A في أقل زمن . في أى مكان لابد له أن يرسو على الشاطئ لو جدف ميلين في الساعة (mi/h) ثم سار 4 mi/h ؟

Example 3-10: A man in a rowboat at p in Figure 3-9, 5 miles (mi from the nearest point A on a straight shore, wishes to reach a point B, 6 mi from A along the shore, in the shortest time. Where should he land if he can row 2 miles per hour (mi/h) and walk 4 mi/h?

دع C نقطة بين A و B والتـى سوف يرسو عندها الرجـل ودع AC = x .
المسافة التى جدفها $PC = \sqrt{25 + x^2}$ وزمن التجديف المطلوب .



شكل 3-9

$$t_1 = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}} = \frac{\sqrt{25 + x^2}}{2}$$

مسافة السير هى CB = 6 - x وزمن السير المطلوب $t_1 = (6 - x)/4$ ، لذلك الزمن الكلى المطلوب .

$$t = t_1 + t_2 = \frac{1}{2}\sqrt{25 + x^2} + \frac{1}{4}(6 - x)$$ و

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{2\sqrt{25+x^2}} - \frac{1}{4} = \frac{2x - \sqrt{25+x^2}}{4\sqrt{25+x^2}}$$

القيمة الحرجة نحصل عليها من $2x - \sqrt{25 + x^2} = 0$

$$x = \frac{5}{3}\sqrt{3} \sim 2.89$$

لذلك ، لابد أن يرسو عند نقطة تبعد عن A مسافة 2.89 mi فى اتجاه B .

• مسائل محلولة Solved Problems

مسألة محلولة 3-1 : بين أن المنحنى $y = x^3 - 8$ ليس لـه حـد أعلـى أو حد أدنى .

Solves problem 3-1 : Show that the curve $y = x^3 - 8$ has no maximum or minimum value.

الحل : ضع $y' = 3x^2 = 0$ يعطـى القيمـة الحرجـة $x = 0$. لكـن $y' > 0$ عندما تكون $x < 0$ وعند $x > 0$. إذن y ليس لها قيمة حـد أقصـى أو حد أدنى . والمنحنى له نقطة انقلاب عند $x = 0$.

مسألة محلولة 3-2 : اختبر $y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$ للتقعـر ونقـط الانقلاب

Solves problem 3-2 : Examine $y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$ for concavity and points of inflection.

الحل : لدينا

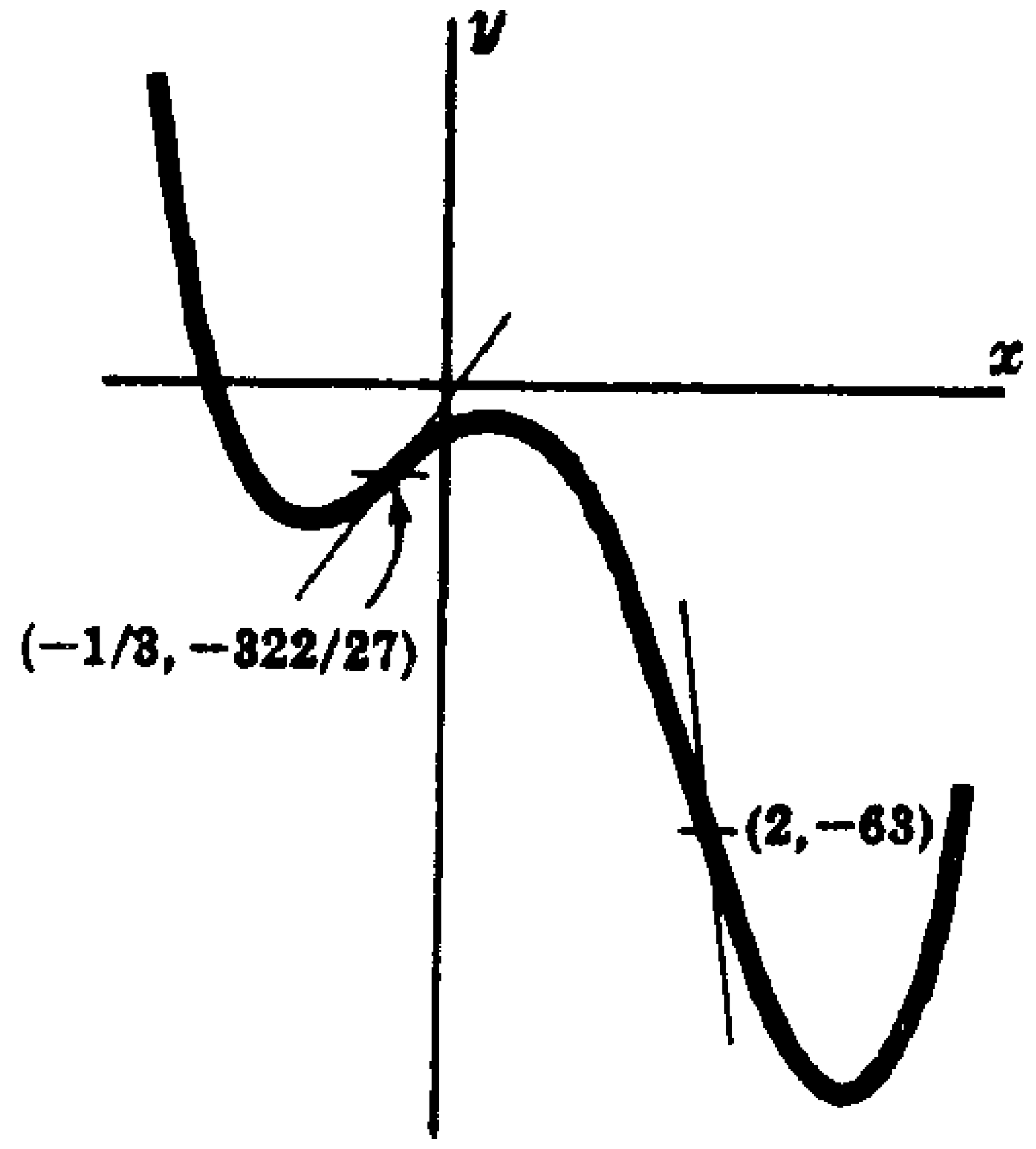
$$y' = 12x^3 - 30x^2 - 24x + 12$$
$$y'' + 36x^2 - 60x - 24 = 12(3x + 1)(x - 2)$$

دع $y'' = 0$ وصل لإيجاد نقط الانقلاب الممكنة $x = -\frac{1}{3}$ و $x = 2$ إذن

عند $x < -\frac{1}{3}$ تكون $y'' = +$ والمنحنى مقعر لأعلى .

عند $-\frac{1}{3} < x < 2$ تكون $y'' = -$ والمنحنى مقعر لأسفل .

عند $x > 2$ تكون $y'' = +$ والمنحنى مقعر لأعلى .



شكل SP3-1

نقطة الانقلاب هى $\left(-\frac{1}{3},\frac{322}{27}\right)$ و (2, -63) حيث إن "y تغير الإشارة عند $x=-\frac{1}{3}$ و $x=2$ انظر شكل SP3-1 .

مسألة محلولة 3-3 : اختبر $y=x^2+250/x$ للحد الأعلى والحد الأدنى باستخدام طريقة المشتقة الثانية .

Solves problem 3-3 : Examine $y = x^2 + 250/x$ for maxima and manima using the second-derivative method.

الحل : هنا $y'=2x-\frac{250}{x^2}=\frac{2(x^3-125)}{x^2}$ ، لذا القيمة الحرجة هى $x=5$.

أيضًا $y''=2+\frac{500}{x^3}$ لأن $y''>0$ عند $x=5$ ، y لها حد أدنى قيمته (= 75) عند $x=5$.

مسألة محلولة 3-4 : باستخدام 200 قدم من الأسلاك . تريد الكسندرا أن تبنى حديقة مستطيلة تتكون من ثلاثة جوانب أما الجانب الرابع فهو مواجهة لحائط المنزل . ما هى أبعاد الحديقة التى تحقق أكبر مساحة ممكنة .

Solves problem 3-4 : Using 200 feet of wire, Alexandra would like to construct a rectangular garden consisting of three sides with the fourth side against a wall of the house. What are the dimensions of the garden that yield the maximum possible area?

الحل : أولاً نبدأ بتعريف

x = طول جانب الحديقة المتعامد على المنزل .

y = طول جانب الحديقة الموازى للمنزل .

ومعطى الطول الكلى للسلك 200 قدم . إذن

$$2x + y = 200 \qquad (1)$$

أيضًا مساحة الحديقة المستطيلة

$$A = xy \qquad (2)$$

بحل المعادلة (1) لقيم y في حدود x .

$$y = 200 - 2x \qquad (3)$$

بتعويض المعادلة (3) في (2)

$$A = x(200 - 2x) \qquad (4)$$

معرفة على الفترة $0 \leq x \leq 100$ ، نحن نبحث لإيجاد أكبر قيمة للمساحة $A = f(x) = x(200 - 2x)$ لقيم x في الفترة [0, 100] في هذه الحالة

$$A = f(x) = 200x - 2x^2$$

نأخذ تفاضل A

$$f'(x) = 200 - 4x$$

بوضع $f'(x) = 0$

$$200 - 4x = 0$$

$$4x = 200$$

$$x = 50 \text{ ft}$$

بالتعويض بهذه القيمة في المعادلة (3) .

$$y = 200 - 2(50) = 200 - 100 = 100 \text{ feet}$$

مسألة محلولة 3-5 : معطى قطعة مربعة من الورق المقوى وطول أضلاعها هو 16 بوصة . تريد لورا أن تبنى بها صندوق بقطع أربعة مربعات ، واحد عند كل زاوية . ما هو مقاس المربع الذى تقطعه لورا لكى يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن

Solves problem 3-5 : Given a square piece of cardboard with sides equal to 16 inches, Laura would like to construct a box by cutting out four squares, one from each corner. What is the size of the square that should be cut out in order to maximize the volume of the box?

الحل : نبدأ بتعريف طول المربع المقطوع من كل زاوية لقطعة الورق المقوى بالمتغير x . إذن كل ضلع من مربع الورق المقوى نعرفه كالآتى :
الطول = 16 - 2x

لذلك حجم صندوق لكن يمكن حسابه كالآتى :

الحجم = V(x) = (الطول) (العرض) (الارتفاع)

$$= (16 - 2x)(16 - 2x)(x)$$

$$= 4x^3 - 64x^2 - 256x$$

قيمة x التى تكبر حجم الصندوق أكبر ما يمكن فى الفترة [0, 8] ويمكن أن تحدث إما عن 0 , 8 أو عند بعض الأعداد الحرجة التى تحقق الحسابات $v'(x) = 0$. قيم 0 , 8 لا تعنى شيء لأى من الاحتمالات لذلك لابد أن نعين القيم الحرجة .

$$V'(x) = 12x^2 - 128x + 256$$

$$= 4(3x^2 - 32x + 64)$$

$$= 4(3x - 8)(x - 8)$$

المعادلة

$$V'(x) = 4(3x - 8)(x - 8) = 0$$

لها جذران : $x = \frac{8}{3}$ و $x = 8$

حيث إن $x = 8$ قد حذفت قبل ذلك ، تكون قيمة x التى تحقق أكبر حجم هى

$$x = \frac{8}{3}$$

والحجم يساوى

$$V\left(\frac{8}{3}\right) = 4\left(\frac{8}{3}\right)^3 - 64\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 256\left(\frac{8}{3}\right) = 455.2 \ \text{in}^3$$

الفصل الرابع
تفاضل الدوال الخاصة
Differentiation of Special Functions

فى هذا الفصل :

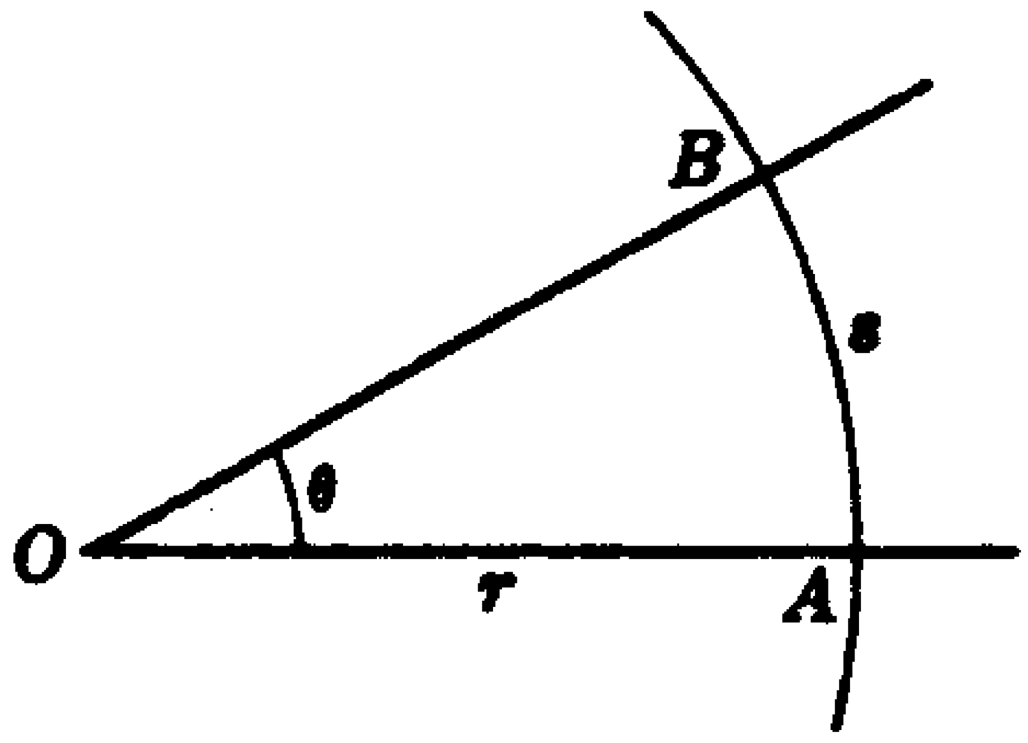
- ✔ تفاضل الدوال المثلثية .
- ✔ تفاضل الدوال المثلثية العكسية .
- ✔ تفاضل الدوال الأسية واللوغاريتمية .
- ✔ تفاضل الدوال الزائدية .
- ✔ تفاضل الدوال الزائدية العكسية .
- ✔ مسائل محلولة .

• تفاضل الدوال المثلثية
Differentiation of Trigonometric Function

القياس الدائرى (القطرى) Radian Measure

دعنا نرمز بالرمز s إلى القوس AB المحصور بين ضلعى الزاوية المركزية AOB لدائرة نصف قطرها r ودع s ترمز إلى مساحة القطاع AOB (انظر شكل 1-4) .

(إذا كانت s = 1/360 من المحيط ، إذن الزاوية AOB قيمتها 1°) . إذا كانت s = r ، يكون قياس الزاوية 1 تقدير دائرى (rad) . وبما أن محيط



شكل 4-1

الدائرة الكاملة هو 2π rad ، إذن يمكن أن نكتب $180/\pi = 1$ rad (درجـة و $1° = \pi/180$ rad لذلك $0° = 0$ rad ، $30° = \pi/6$ rad ، $45° = \pi/4$ rad ، $180° = \pi$ rad ، $360° = 2\pi$ rad) .

افترض أن AOB قيست بالدرجات ومقدارها α ، إذن يمكن إيجاد طول القوس ومساحة القطاع كما يلى :

$$(4\text{-}1) \qquad s = \frac{\pi}{180}\alpha r \qquad \text{و} \qquad s = \frac{\pi}{360}\alpha r^2$$

افترض أن AOB قيست بالتقدير الدائرى وقيمتها θ rad إذاً

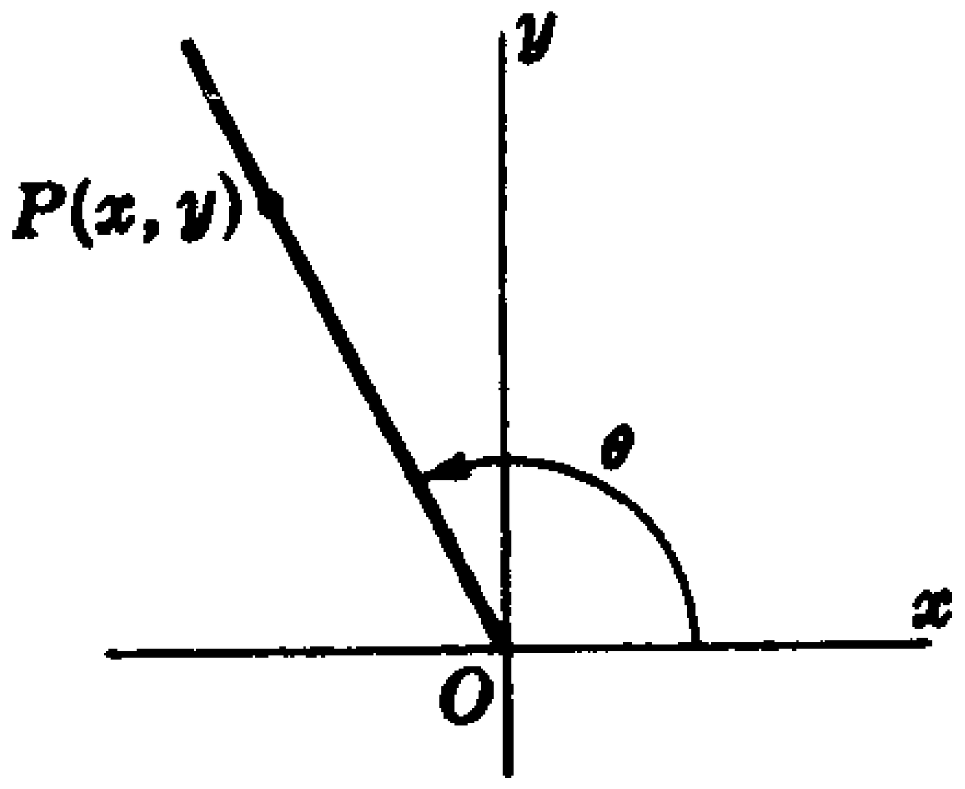
$$(4\text{-}2) \qquad s = \theta r \qquad \text{و} \qquad s = \frac{1}{2}\theta r^2$$

ملاحظة

إن مقارنة بين المعادلتين (4-1) و (4-2) سوف توضح أحد مزايا التقدير الدائرى . تفصيليًا هو تقدير ليس له وحدات أى أنه عدد حقيقى .

الدوال المثلثية Trigonometric Functions

دع θ أى عدد حقيقى . ارسم الزاوية التى قياسها وقيمتـها θ rad عنـد نقطة الأصل فى نظام المحاور المتعـامدة بحيـث يكـون ضلعـها الأول منطبق على محور x (انظر شكل 4-2) .



شكل 4-2

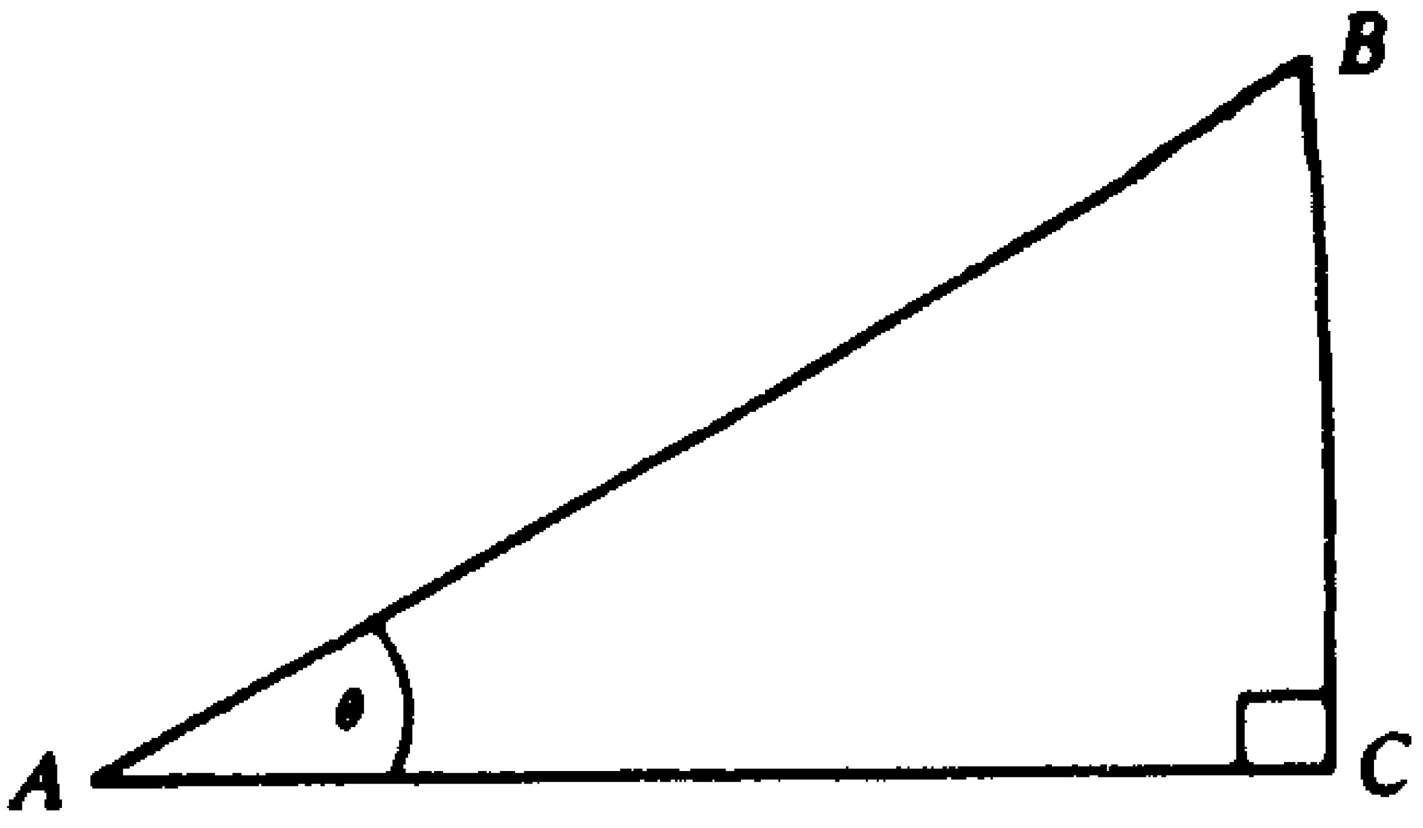
خذ النقطة P(x, y) على الضلع الثانى للزاوية على بعد وحدة المسافات من 0 . إذن نعرف الدوال $\sin\theta = y$ و $\cos\theta = x$.

مجال التعريف لكل من $\sin\theta$ و $\cos\theta$ هو فئة الأعداد الحقيقية ، ومدى $\sin\theta$ هو $-1 \le y \le 1$ ومدى $\cos\theta$ هو $-1 \le x \le 1$. بمعلومية أنه لو θ هى زاوية حادة للمثلث القائم ABC (انظر شكل 4-3) ، إذن

$$\sin\theta = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}} = \frac{BC}{AC}$$



شكل 4-3

الميل m للخط المائل هو $\tan\alpha$ حيث إن α زاوية مقاس فى عكس اتجاه عقارب الساعة من محور x الموجب إلى الخط المائل .

جدول 1-4 : يعرف بعض الدوال المثلثية القياسية وجدول 2-4 يبين بعض القيم المهمة للدوال المثلثية .

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta,\ \cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\sin(\alpha+2\pi) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha$$
$$\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha,\ \cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha,\ \tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$$
$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha,\ \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

جدول 1-4

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0	0	1	0
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	∞
π	0	-1	0
$3\pi/2$	-1	0	∞

جدول 2-4

الصيغ التفاضلية Differentiation Formulas

الآن يمكن أن نعرف الدوال المثلثية للمتغير x (مفضلاً عن الرمز إلى الزاوية بالرمز θ) .

قاعدة 14	$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	قاعدة 15	$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
قاعدة 16	$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	قاعدة 17	$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
قاعدة 18	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	قاعدة 19	$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

مثال 4-1 : أوجد المشتقة الأولى للمعادلة $y = \sin 3x + \cos 2x$

Example 4-1: Find the first derivative of $y = \sin 3x + \cos 2x$.

$$y' = \cos 3x \frac{d}{dx}(3x) - \sin 2x \frac{d}{dx}(2x) = 3\cos 3x - 2\sin 2x$$

مثال 4-2 : أوجد المشتقة الأولى للدالة $f(x) = \frac{\cos x}{x}$.

Example 4-2: Find the first derivative of $f(x) = \frac{\cos x}{x}$.

$$f'(x) = \frac{x\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(x)}{x^2} = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$$

• تفاضل الدوال المثلثية العكسية

Differentiation of Inverse Trigonometric Functions

الدوال الدائرية العكسية The Inverse Trigonometric Functions

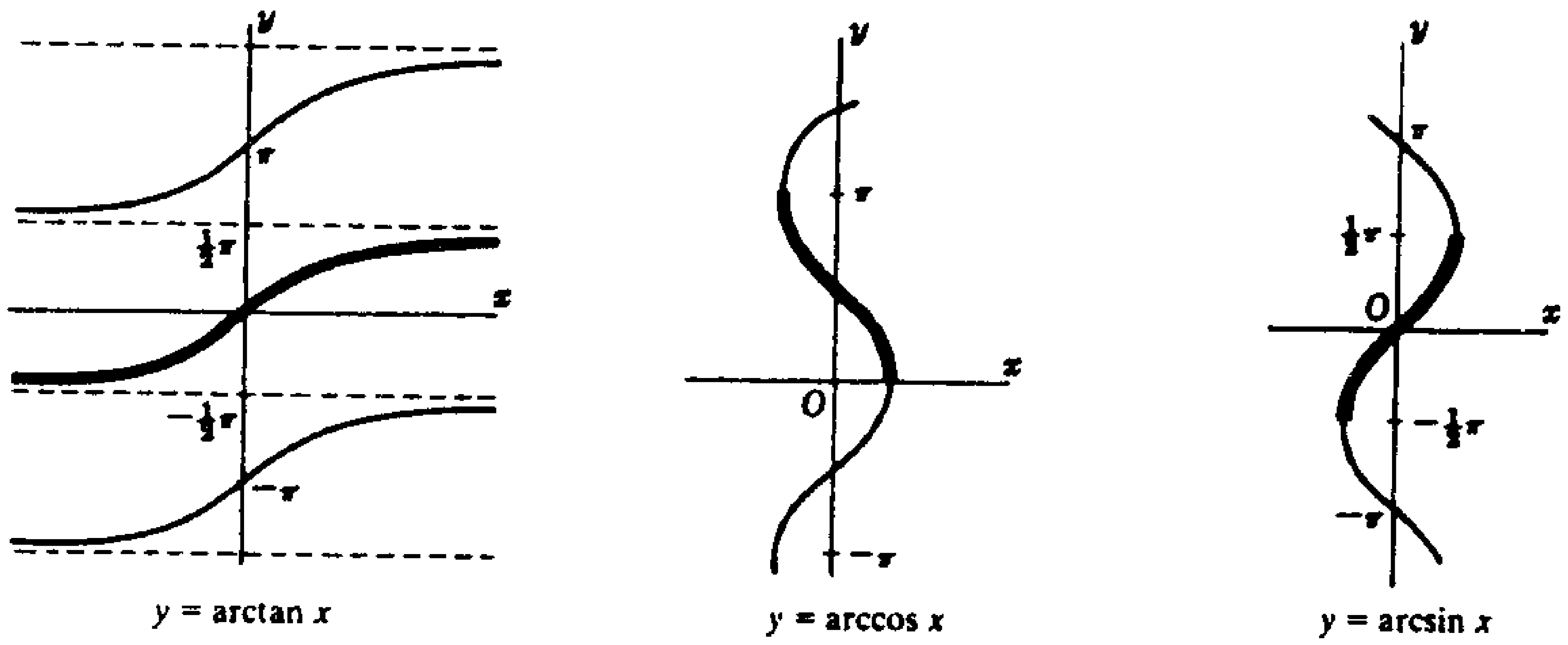
اذا كانت $x = \sin y$ ، معكوس الدالة يكتب $y = \arcsin x$ (تعريف بديل هو $y = \sin^{-1} x$) . مجال $\arcsin x$ هو $-1 \le x \le 1$ وهو مدى الدالة $\sin y$. مدى $\arcsin x$ هو فئة الأعداد الحقيقية التى هى مجال $\sin y$. مجال ومدى الدوال المثلثية العكسية الباقية يمكن إيجاده بنفس الأسلوب .

الدوال المثلثية العكسية متعددة القيم . لذلك هناك موافقة لتقسيم

الرسم البيانى إلى أقواس لها قيمة واحدة ، نعرف مثل هذه الأقواس فى جدول 4-3 (وتدعى الفرع الأساسى) لكل دالة ، شكل 4-4 الفروع الأساسية موضحة بالمنحنيات السميكة .

Function	Principal Branch
$y = \arcsin x$	$-\frac{1}{2}\pi \leqq y \leqq \frac{1}{2}\pi$
$y = \arccos x$	$0 \leqq y \leqq \pi$
$y = \arctan x$	$-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$
$y = \text{arccot}\ x$	$0 < y < \pi$
$y = \text{arcsec}\ x$	$-\pi \leqq y < -\frac{1}{2}\pi,\ 0 \leqq y < \frac{1}{2}\pi$
$y = \text{arccsc}\ x$	$-\pi < y \leqq -\frac{1}{2}\pi,\ 0 < y \leqq \frac{1}{2}\pi$

جدول 4-3



شكل 4-4

Differentiation Formulas الصيغ التفاضلية

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ قاعدة 20

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ قاعدة 21

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$ قاعدة 22

قاعدة 23 $$\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

قاعدة 24 $$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

قاعدة 25 $$\frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

مثال 4-3 : أوجد المشتقة الأولى للمعادلة $y = \arctan 3x^2$.

Example 4-3: Find the first derivative of $y = \arctan 3x^2$.

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{1}{1+(3x^2)^2}\right]\frac{d}{dx}(3x^2) = \frac{6x}{1+9x^4}$$

مثال 4-4 : أوجد المشتقة الأولى للدالة $f(x) = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}$

Example 4-4: Find the first derivative of $f(x) = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}$

$$f'(x) = x\left[\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-1/2}(-2x)\right] + (a^2-x^2)^{1/2} + a^2\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\frac{1}{a}$$

$$= 2\sqrt{a^2-x^2}$$

• تفاضل الدوال الأسية واللوغاريتمية Differentiation of Exponential and Logarithmic Functions

نعرف العدد e بالمعادلة

$$e = \lim_{h \to +\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h$$

إذن e يمكن أن تقدم بواسطة $\lim_{k \to 0}(1+k)^{1/k}$. بالإضافة يمكن أيضًا أن نكتب

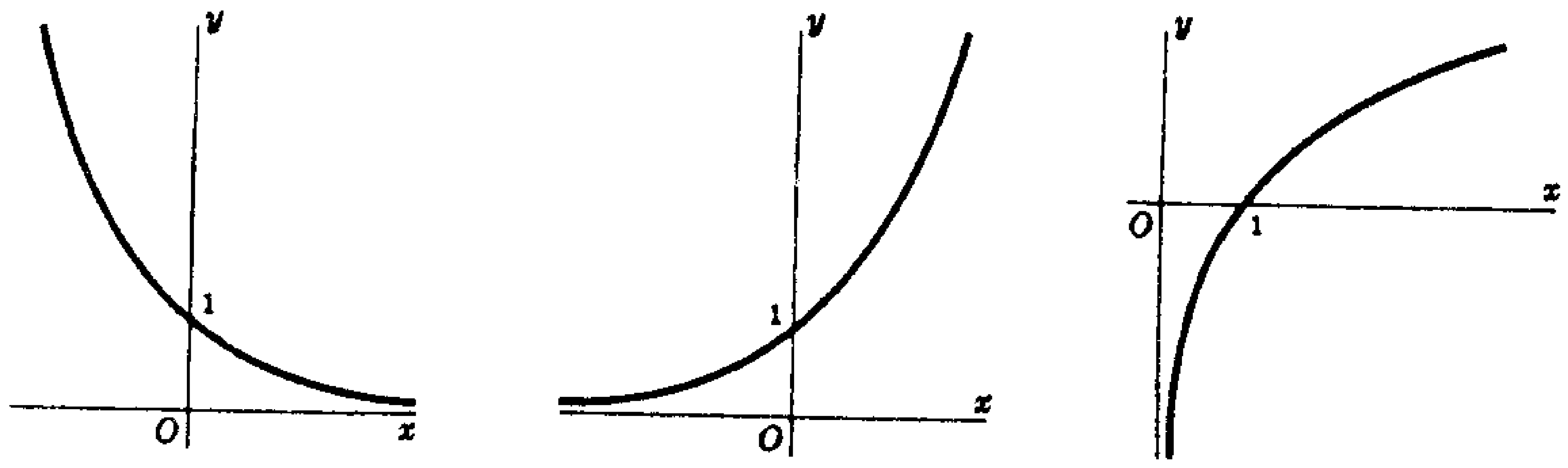
$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = 2.71828$$

وتسمى « العدد الطبيعى » أو عدد أويلر ، e سوف تستخدم كقاعدة للدوال اللوغاريتمية الطبيعية .

Logarithmic Functions الدوال اللوغاريتمية

أفرض $a > 0$ و $a \neq 1$. لو $a^y = x$ ، إذن نعرف $y = \log_a x$. بمعنى أن $x = a^y$ و $y = \log_a x$ هى دوال عكسية .

دع $\ln x = \log_e x$. إذن $\ln x$ تسمى اللوغاريتم الطبيعى للمتغير x . انظر أيضًا شكل 4-5 . مجال $\log_a x$ هو $x > 0$ والمجال هو دالة الأعداد الحقيقية .



$y = e^{-ax}$ $y = e^{ax}$ $y = \ln x$

شكل 4-5

Differentiation Formulas الصيغ التفاضلية

قاعدة 26
$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e,\ a > 0,\ a \neq 1$$
$$= \frac{1}{x \ln a}$$

قاعدة 27
$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

قاعدة 28
$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a,\ a > 0$$

قاعدة 29
$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

مثال 4-5 : أوجد المشتقة الأولى للمعادلة $y = \log_a(3x^2 - 5)$.

Example 4-5: Find the first derivative of: $y = \log_a(3x^2 - 5)$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3x^2-5}(\log_a e)\frac{d}{dx}(3x^2-5)=\frac{6x}{3x^2-5}\log_a e=\frac{6x}{(3x^2-5)\ln a}$$

مثال 4-6 : أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = \ln \sin 3x$.

Example 4-6: Find the first derivative of: $y = \ln \sin 3x$.

$$y'=\frac{1}{\sin 3x}\frac{d}{dx}(\sin 3x)=3\frac{\cos 3x}{\sin 3x}=3\cot 3x$$

Logarithmic Differentiation التفاضل اللوغاريتمى

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق وكانت الدالة هى حاصل ضرب أو خارج قسمة عديد من العوامل فإن عملية التفاضل يمكن أن تبسط بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للدالة قبل التفاضل ، حيث إن

$$\frac{d}{dx}(\ln y)=\frac{1}{y}\frac{d}{dx}(y)$$

وبذلك استخدمنا الصيغة الآتية :

القاعدة 30

$$\frac{d}{dx}(y)=y\frac{d}{dx}(\ln y)$$

مثال 4-7 : استخدم اللوغاريتم التفاضلى لإيجاد المشتقة الأولى للدالة $y = (x^2 + 2)^3 \bullet (1 + x^3)^4$.

Example 4-7: Use logarithmic differentiation to find the first derivative given the function $y = (x^2 + 2)^3 \bullet (1 + x^3)^4$.

$$\ln y=\ln(x^2+2)^3(1-x^3)^4=3\ln(x^2+2)+4\ln(1-x^3)$$

$$y'=y\frac{d}{dx}[3\ln(x^2+2)+4\ln(1-x^3)]=(x^2+2)^3(1-x^3)^4\left(\frac{6x}{x^2+2}-\frac{12x^2}{1-x^3}\right)$$

$$=6x(x^2+2)^2(1-x^3)^3(1-4x-3x^3)$$

• تفاضل الدوال الزائدية

Differentiation of Hyperbolic Functions

Definitions of Hyperbolic Functions تعريف الدوال الزائدية

لأى عدد حقيقى x ماعدا ما يذكر غير ذلك ، تعرف الدوال الزائدية كالآتى

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},\ x \neq 0$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}},\ x \neq 0$$

Differentiation Formulas الصيغ التفاضلية

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$$ قاعدة 31

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$ قاعدة 32

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$$ قاعدة 33

$$\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$$ قاعدة 34

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$ قاعدة 35

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$ قاعدة 36

مثال 4-8 : أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \sinh 3x$.

Example 4-8: Find $\frac{dy}{dx}$ given the function: $y = \sinh 3x$

$$\frac{dy}{dx}=\cosh 3x\ \frac{d}{dx}(3x)=3\cosh 3x$$

مثال 4-9 : أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y=\coth\frac{1}{x}$

Example 4-9: Find $\frac{dy}{dx}$ given the function: $y=\coth\frac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx}=-\operatorname{csch}^2\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}\operatorname{csch}^2\frac{1}{x}$$

• تفاضل الدوال الزائدية العكسية
Differentiation of Inverse Hyperbolic Functions

تعريف الدوال الزائدية العكسية
Definitions of Inverse Hyperbolic Functions

$\sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ لكل قيم x و $\coth^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},\ x^2>1$

$\cosh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\ x\geq 1$ $\quad$ $\operatorname{sech}^{-1}x=\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x},\ 0<x\leq 1$

$\tanh^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ x^2<1$ $\quad$ $\operatorname{csch}^{-1}x=\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right),\ x\neq 0$

Differentiation Formulas الصيغ التفاضلية

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$ **قاعدة 37**

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ x>1$$ **قاعدة 38**

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x)=\frac{1}{1-x^2},\ x^2<1$$ **قاعدة 39**

$$\frac{d}{dx}(\coth^{-1}x)=\frac{1}{1-x^2},\ x^2>1$$ قاعدة 40

$$\frac{d}{dx}(\text{sech}^{-1}x)=\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}},\ 0<x<1$$ قاعدة 41

$$\frac{d}{dx}(\text{csch}^{-1}x)=\frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}},\ x\neq 0$$ قاعدة 42

مثال 4-10 : استنتج أن $\frac{d}{dx}(\sinh^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Example 4-10: Derive $\frac{d}{dx}(\sinh^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

دع $y=\sinh^{-1}x$. إذاً $\sinh y = x$ والتفاضل ينتج .

$$\cosh y\ \frac{dy}{dx}=1$$

لذلك

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cosh y}=\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

مثال 4-11 : أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة

Example 4-11: Find $\frac{dy}{dx}$ given the function

$$y=\cosh^{-1}e^x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\frac{d}{dx}(e^x)=\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}$$

• مسائل محلولة Solved Problems

مسألة محلولة 4-1 : أوجد مشتقة الدالة $y=\tan x^2$.

Solves problem 4-1 : Find the first derivative of: $y=\tan x^2$.

الحل :

$$y' = \sec^2 x^2 \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \sec^2 x^2$$

مسألة محلولة 4-2 : أوجد مشتقة الدالة $y = \tan^2 x = (\tan x)^2$.

Solves problem 4-2 : Find the first derivative of: $y = \tan^2 x = (\tan x)^2$.

الحل :

$$y' = 2 \tan x \frac{d}{dx}(\tan x) = 2 \tan x \sec^2 x$$

مسألة محلولة 4-3 : أوجد مشتقة الدالة $y = x - \sin x \cos x$.

Solves problem 4-3 : Find the first derivative of: $y = x - \sin x \cos x$.

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{d}{dx}(\sin x \cos x)$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x \cos x) = \cos x \cos x + (-\sin x)\sin x$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

وبالتعويض فى المعادلة السابقة يمكن إيجاد المشتقة كالآتى

$$\frac{dy}{dx} = 1 - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 - \cos^2 x + \sin^2 x$$

مسألة محلولة 4-4 : أوجد مشتقة $\frac{d}{dx}\left(\frac{\csc x}{\sqrt{x}}\right)$

Solves problem 4-4 : Find the derivative of: $\frac{d}{dx}\left(\frac{\csc x}{\sqrt{x}}\right)$

الحل :

$$\frac{dy}{dx}=1-\frac{d}{dx}(\sin x \cos x)$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x \cos x)=\cos x \cos x+(-\sin x)\sin x$$

$$= \cos^2 x-\sin^2 x$$

وبالتبسيط نحصل على

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\csc x}{\sqrt{x}}\right)=\frac{-\csc x \cot x}{\sqrt{x}}-\frac{\csc x}{2x^{3/2}}$$

مسألة محلولة 4-5 : أوجد مشتقة الأولى للدالة $y = x^2 3^x$.

Solves problem 4-5 : Find the first derivative of: $y = x^2 3^x$.

الحل :

$$y'=x^2\frac{d}{dx}(3^x)+3^x\frac{d}{dx}(x^2)=x^2 3^x \ln 3+3^x 2x=x3^x(x \ln 3+2)$$

مسألة محلولة 4-6 : أوجد مشتقة الدالة $f(x) = \sin^2 3x$.

Solves problem 4-6 : Find the derivative of: $f(x) = \sin^2 3x$.

الحل : مشتقة الدالة مركبة من الدوال الآتية .

$$y = u^2,\ u = \sin v,\ v = 3x$$

إذن

$$\frac{d}{dx}(\sin^2 3x)=\frac{d}{dx}(u^2)\frac{d}{dx}(\sin v)\frac{d}{dx}(3x)$$
$$=(2u)(\cos v)(3)$$
$$= 6u \cos v$$

وبإجراء التعويض المناسب نحصل على

للمزيد من الكتب http://www.mostafamas.com على سنة الحبيب

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^2 3x\right)=6\sin v\cos v$$

$$=6\sin 3x\cos 3x$$

مسألة محلولة 4-7 : أوجد مشتقة الدالة $y=\sin^{-1}\left(\frac{5x}{6}\right)$

Solves problem 4-7 : Find the derivative of: $y=\sin^{-1}\left(\frac{5x}{6}\right)$.

الحل : الدالة السابقة مركبة من دالتين وهكذا نحصل على المشتقة باستخدام قاعدة التسلسل .

$$y=\sin^{-1}u \quad \text{حيث} \quad u=\frac{5x}{6}$$

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \quad \text{و} \quad \frac{du}{dx}=\frac{5}{6}$$

حيث إن

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right)\left(\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{5}{6}x\right)^2}}\right)\left(\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{25}{36}x^2\right)}}\right)\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{36-25x^2}}\right)\left(\frac{5}{6}\right)$$

$$=\left(\frac{5}{\sqrt{36-25x^2}}\right)$$

مسألة محلولة 4-8 : أوجد مشتقة الدالة $y=\sec^{-1}6x$.

Solves problem 4-8 : Find the derivative of: $y=\sec^{-1}6x$.

الحل : هذه المسألة تحتاج إلى قاعدة التسلسل ونعطى

$$y=\sec^{-1}6x \quad \text{حيث} \quad u=6x$$

على سنة الحبيب http://www.mostafamas.com للمزيد من الكتب

إذن

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\bullet 6=\frac{1}{|6x|\sqrt{36\,x^2-1}}\bullet 6$$

$$=\frac{1}{|6||x|\sqrt{36\,x^2-1}}\bullet 6=\frac{1}{|x|\sqrt{36\,x^2-1}}$$

للمزيد من الكتب http://www.mostafamas.com على سنة الحبيب

الفصل الخامس

قانون المتوسط ، الأشكال غير المعينة ، المميز ، ورسم المنحنيات

The Law of The Mean, Indeterminate Forms, Differentials, and Curve Sketching

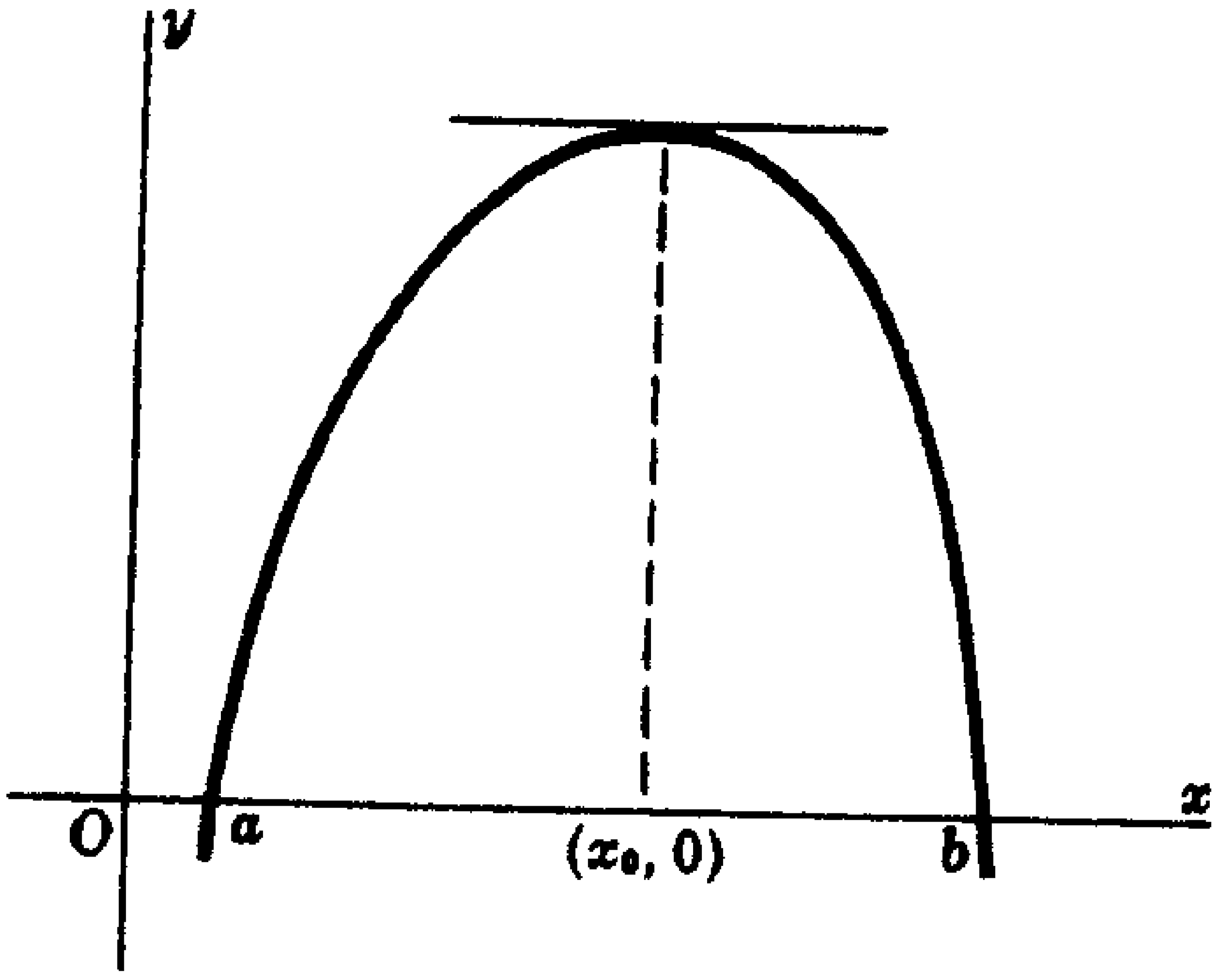
فى هذا الفصل :

- ✔ نظرية رولز .
- ✔ قانون المتوسط .
- ✔ الأشكال الغير معينة .
- ✔ التفاضلة .
- ✔ رسم المنحنيات .
- ✔ مسائل محلولة .

• نظرية رولز Rolle's Theorem

إذا كانت f(x) دالة متصلة فى الفترة $a \le x \le b$ وكانت $f(a) = f(b) = 0$ وإذا كانت المشتقة $f'(x)$ موجودة فى أى مكان خلال الفترة ما عدا احتمالية نقط النهايات ، إذن $f'(x) = 0$ على الأقل لقيمة واحدة للمتغير x ، نسميها $x = x_0$ ، بين b , a هندسيًا ، هذا يعنى أنه لو تقاطع منحنى متصل محور x عند $x = a$ ، $x = b$ وله مماس عند كل النقط b , a إذن .

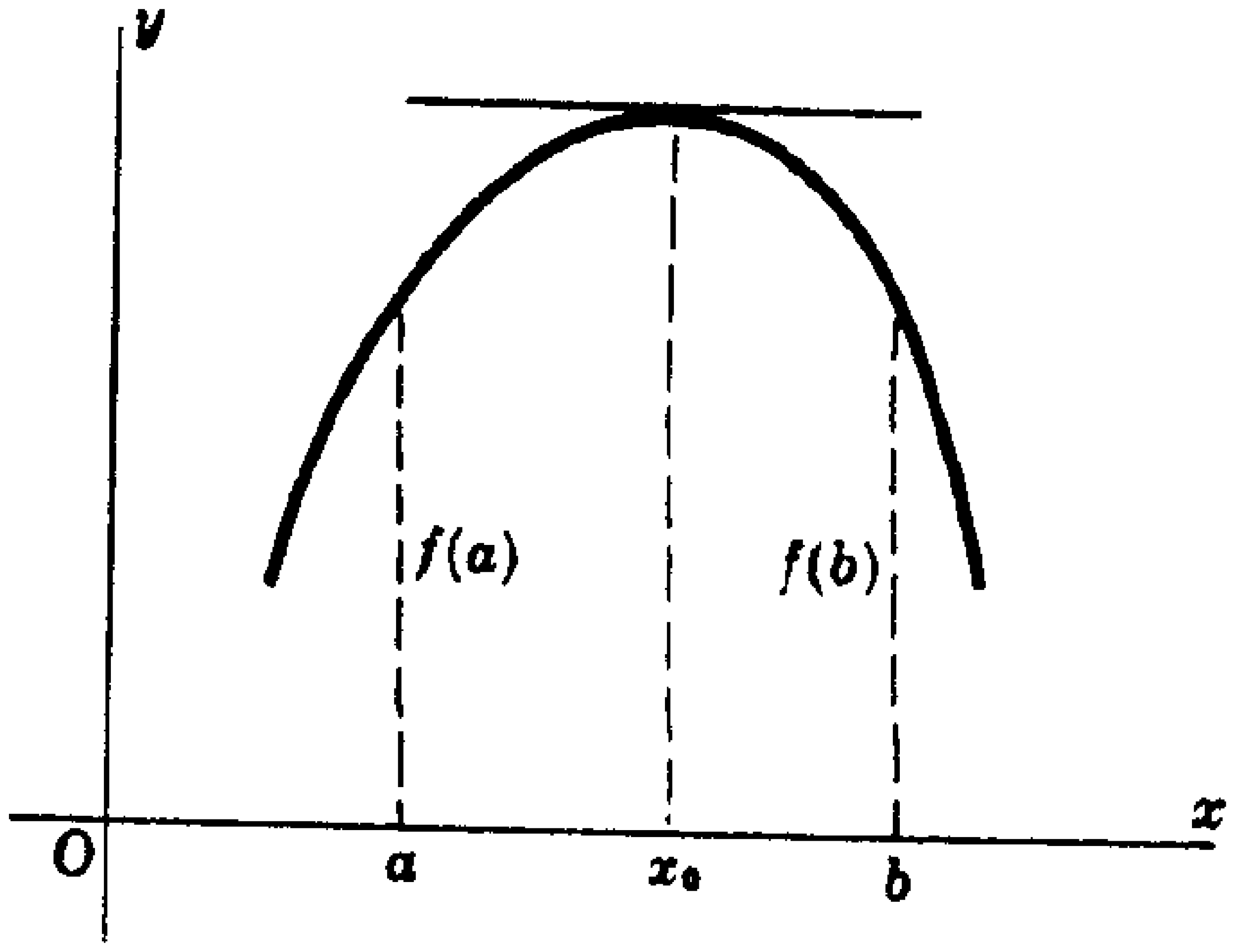
على سنة الحبيب http://www.mostafamas.com للمزيد من الكتب



شكل 5-1

نتيجة

إذا كانت $f(x)$ تحقق شرط نظرية رولز ماعدا عند $f(a) = f(b) \neq 0$ إذن $f'(x) = 0$ على الأقل لقيمة واحد للمتغير x ونسميه $x = x_0$ بين a , b (انظر شكل 5-2) . وهذا يجعلنا نقول أنه إذا كان الخط الذى يحتوى نقط النهايات أفقيًا (وميله صفر) إذن يكون ميل المماس أيضًا صفر لبعض النقط البينية .



شكل 5-2

يوجد على الأقل نقطة واحدة $x = x_0$ بين b, a يكون عندها المماس موازى

للمزيد من الكتب http://www.mostafamas.com على سنة الحبيب

لمحور x . (انظر شكل 1-5) .

مثال 1-5 : أوجد قيمة x_0 المفروضة فى نظرية رولز للدالة $f(x) = x^3 - 12x$ فى الفترة $0 \le x \le 2\sqrt{3}$.

Example 5-1: Find the value of x_0 prescribed in Rolle's theorem for $f(x) = x^3 - 12x$ on the interval $0 \le x \le 2\sqrt{3}$.

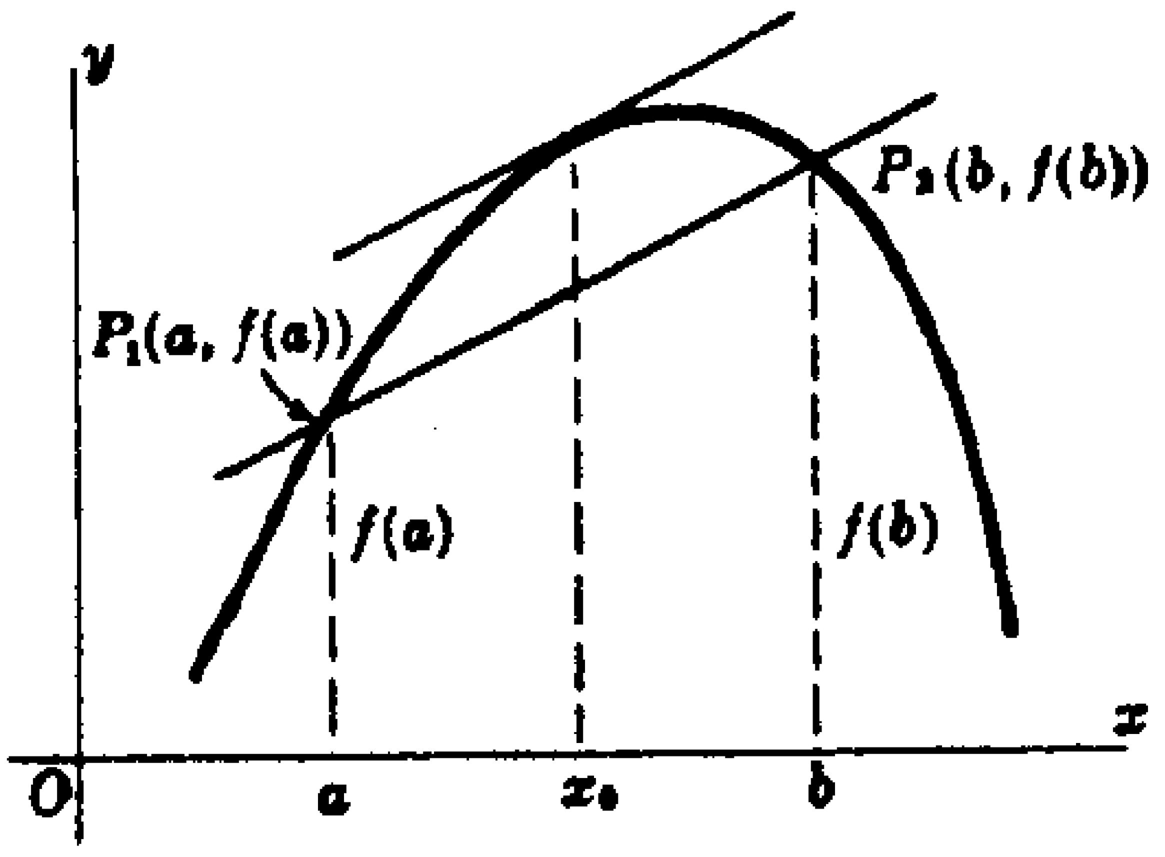
$f'(x) = 3x^2 - 12x = 0$ عند $x = \pm 2$ ، إذاً $x_0 = 2$ فى القيمة المفروضة .

• قانون المتوسط The Law of the Mean

إذا كانت $f(x)$ هى دالة متصلة فى الفترة $a \le x \le b$ ولو $f'(x)$ موجودة فى أى مكان فى الفترة ما عدا احتمالية نقط النهاية . إذن يوجد على الأقل قيمة واحد $x = x_0$ بين a و b بحيث إن

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$$

وأيضًا يعرف بنظرية القيمة المتوسطة . هندسيًا إذا كانت P_1 و P_2 هما نقطتان على منحنى متصل وله مماس عند كل نقطة متوسطة بين P_1 و P_2 إذن يوجد على الأقل نقطة واحدة على المنحنى وتقع بين P_1 و P_2 وعندها ميل المنحنى يساوى ميل الخط بين نقط النهاية P_1 و P_2 (انظر شكل 3-5) .



شكل 3-5

على سنة الحبيب http://www.mostafamas.com للمزيد من الكتب

قانون المتوسط ممكن وضعه فى عدة صيغ مفيدة . الأول نحصل عليها من ضرب b - a .

(5-1) لبعض قيم x_0 بين a ، b $\quad f(b) = f(a) + (b - a) f'(x_0)$

ويتغير بسيط فى الحروف نصل إلى مصطلح لأى قيمة اختيارية x .

(5-2) لبعض قيم x_0 بين a ، x $\quad f(b) = f(a) + (x - a) f'(x_0)$

مثال 5-2 : استخدم قانون المتوسط لتقريب $\sqrt[6]{65}$.

Example 5-2: Use the law of the mean to approximate $\sqrt[6]{65}$.

دع $f(x) = \sqrt[6]{x}$ ، $a = 64$ ، $b = 65$ وطبق المعادلة (5-1) . نحصل على

$$f(65) = f(64) + \frac{65-64}{6x_o^{5/6}}, \quad 64 < x_o < 65$$

حيث إن x_0 غير معلومة . نأخذ $x_0 = 64$ ، إذن بالتقريب .

$$\sqrt[6]{65} = \sqrt[6]{64} + 1/\left(6\sqrt[6]{64^5}\right) = 2 + 1/192 = 2.00521$$

مثال 5-3 : ثقب دائرى قطره 4 in وعمقه 1 ft مصنوع فى كتلة معدنية . وقد تم تجويفه مرة أخرى لزيادة قطره إلى 4.12 in . احسب كمية المعدن التى سوف يتم إزالتها .

Example 5-3: Circular hole with a diameter of 4 in and a depth of 1 ft in a metal block is rebored to increase to 4-12 in. Estimate the amount of metal removed.

حجم الثقب الدائرى الذى نصف قطره x وعمقه 12 in معطى بالمعادلة $V = f(x) = 12\pi x^2$. سوف تحسب f(2.06) - f(2) وبواسطة قانون المتوسط .

$$f(2.06) - f(2) = 0.06\, f'(x_o) = 0.06(24\pi x_o) \quad , \quad 2 < x_o < 2.06$$

خذ $x_0 = 2$ إذن بالتقريب .

$$f(2.06) - f(2) = 0.06(24\pi)(2) = 2.88\pi \text{ in}^3$$

على سنة الحبيب http://www.mostafamas.com للمزيد من الكتب

قانون المتوسط العام (تعميم قانون المتوسط)

Generalized Law of the Mean

إذا كـانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين متصلتين فـي الفتـرة $a \le x \le b$ ولـو $f'(x)$ و$g'(x)$ موجودتين و $g'(x) \ne 0$ فى أى مكان خلال الفترة ماعدا احتمالية نقط النهاية . إذن يوجد على الأقل قيمة واحد x وتكون $x = x_0$ بين b , a بحيث إن

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_o)}{g'(x_o)}$$

ولحالة $g(x) = x$ تكون هذه حالة قانون المتوسط .

Extended Law of the Mean قانون المتوسط الممتد

إذا كانت $f(x)$ ومشتقتها الأول $n - 1$ متصلتين فى الفترة $a \le x \le b$ وكانت $f^{(n)}(x)$ موجودة فى أى مكان فى الفترة ما عدا احتمالية فقـط النهايـة . إذن يوجد على الأقل قيمة واحدة x ، فنقول $x = x_0$ بين b , a بحيث إن

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(b-a)^n \qquad (5\text{-}3)$$

عند تبديل b بالمتغير x تصبح المعادلة 5-3 كالآتى :

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x-a)^n \qquad (5\text{-}4)$$

لبعض قيم x_0 بين a ، x

عند تبديل a بالعدد 0 تصبح المعادلة 5-4 كالآتى :

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x_o)}{(n)!}x^n \qquad (5\text{-}5)$$

• الأشكال الغير معينة Indeterminate Forms

مشتقة الدالة f(x) القابلة للاشتقاق معرف كالآتى :

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x} \qquad (5\text{-}6)$$

وحيث إن نهاية كل من البسط والمقام للكسر هى صفر ، المعادلة (5-6) تعتبر مثال للنهاية التى تسمى غير معينة من النوع 0/0 . بالمثل معتاد أن نسمى النهاية مثل .

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{9x+7}$$

بالغير معينة من النوع ∞/∞ . هذه الرموز 0/0 ، ∞/∞ ورموز أخرى ($0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$) والتى سوف نتكلم عنها بعد ذلك لابد ألاَّ تؤخذ حرفيًا . لا يوجد لها معنى رقمى ، فقط ملائمة لإيجاد بعض تصرفات النهايات .

الكمية الغير معينة من النوع 0/0 : قاعدة هوسبيتال

Indeterminate Type 0/0; L'Hospital's Rule

إذا كان a هو عدد ولو f(x) و g(x) هى دوال قابلة للاشتقاق و $g(0) \neq 0$ لكل قيمة x فى بعض الفترة $0<|x-a|<\delta$ ولو

$$\lim_{x\to a} f(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a} g(x)=0$$

إذن عندما $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ تكون موجودة أو غير متناهية فى الصغر ، نكتب

على سنة الحبيب http://www.mostafamas.com للمزيد من الكتب

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ (قاعدة هوسبيتال)

مثال 4-5 :

$\lim_{x\to 3} \frac{x^4-81}{x-3} = 108$ هو كمية غير معينة من النوع 0/0 لأن

Example 5-4: $\lim_{x\to 3} \frac{x^4-81}{x-3} = 108$ is indeterminate of type 0/0. Because

$$\lim_{x\to 3} \frac{\frac{d}{dx}(x^4-81)}{\frac{d}{dx}(x-3)} = \lim_{x\to 3} 4x^3 = 108$$

لدينا $\lim_{x\to 3} \frac{x^4-81}{x-3}$

ملاحظة

قاعدة هوسبيتال تبقى صالحة عنده أبدال $\lim_{x\to a}$ بالنهايات $\lim_{x\to a+}$ و $\lim_{x\to a-}$

الكمية غير معينة من النوع ∞/∞ Indeterminate Types ∞/∞

الخلاصة من قاعدة هوسبيتال لا تتغير لو أن أحد التغييرات الآتية أو الاثنين معًا تم على فرض القاعدة .

1- « $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ »

ثم تتغير بالصيغ الآتية

« $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ »

2 - « a عدد حقيقى » ثم تغيره كالآتى « ∞ أو -∞ ، $a = -\infty$ »

و « $0|x - a| < \delta$ » ثم تغيره كالآتى « $|x| > M$ » .

على سنة الحبيب http://www.mostafamas.com للمزيد من الكتب

مثال 5-5 : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}$ هـى كمية غير معينة من النوع $\frac{\infty}{\infty}$ بتطبيق قاعدة هوسبيتال . مرتين تعطى النتيجة .

Example 5-5: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}$ is indeterminate of type $\frac{\infty}{\infty}$. Applying l'Hospital's rule twice gives us

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

الكمية الغير معينة $\infty \bullet 0$ و $\infty - \infty$

Indeterminate Types $0 \bullet \infty$ and $\infty - \infty$

نتناول هذا الموضوع بتحويلها أولاً إلى أحد الأنواع 0/0 أو ∞/∞ . ومثال ذلك .

$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}$ من النوع $\infty \bullet 0$ ولكن

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}$ من النوع ∞/∞ ولكن

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-\sin x}{x\sin x}\right)$ من النوع 0/0

مثال 5-6 : أوجد $\lim_{x\leftarrow\infty}(x^2\ln x)$.

Example 5-6: Evaluate $\lim_{x\leftarrow\infty}(x^2\ln x)$.

بما أن $x\to 0+$ ، $x^2\to 0$ و $x-\infty$. إذن $\frac{\ln x}{1/x^2}$ هى كمية غير معينة من النوع ∞/∞ .

$$\lim_{x\to0+}(x^2\ln x)=\lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{1/x^2}=\lim_{x\to0+}\frac{1/x}{-2/x^3}=\lim_{x\to0+}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)=0$$

الكمية الغير معينة من النوع 0^0 ، ∞^0 و 1^∞

Indeterminate Types 0^0 , ∞^0 and 1^∞

لو $\lim y$ هى أحد هذه الأنواع . إذن $\lim (\ln y)$ يكون من النوع $\infty \bullet 0$.

مثال 5-7 : أوجد $\lim\limits_{x\to 0}(\sec^2 2x)^{\cot^2 3x}$.

Example 5-6: Evaluate $\lim\limits_{x\to 0}(\sec^2 2x)^{\cot^2 3x}$.

هذا النوع هو 1^∞ . اجعل $y=(\sec^3 2x)^{\cot^2 3x}$.

إذن :
$$\ln y=\cot^2 3x \ln \sec^3 2x=\frac{3\ \ln \sec 2x}{\tan^2 3x}$$

و $\lim\limits_{x\leftarrow 0}\ln y$ من النوع 0/0 وقاعدة هوسبيتال تعطى

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\ \ln \sec 2x}{\tan^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{6\ \tan 2x}{6\ \tan 3x\ \sec^2 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan 3x}$$

وحيث إن $\lim\limits_{x\to 0}\sec^2 3x=1$ والنهاية العلوية عن النوع 0/0 . إذن قاعدة هوسبيتال تعطى

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\ \sec^2 2x}{3\ \sec^2 3x}=\frac{2}{3}$$

وحيث إن $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\frac{2}{3}$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0} y = \lim\limits_{x\to 0}\left(\sec^3 2x\right)^{\cot^2 3x}=e^{2/3}$

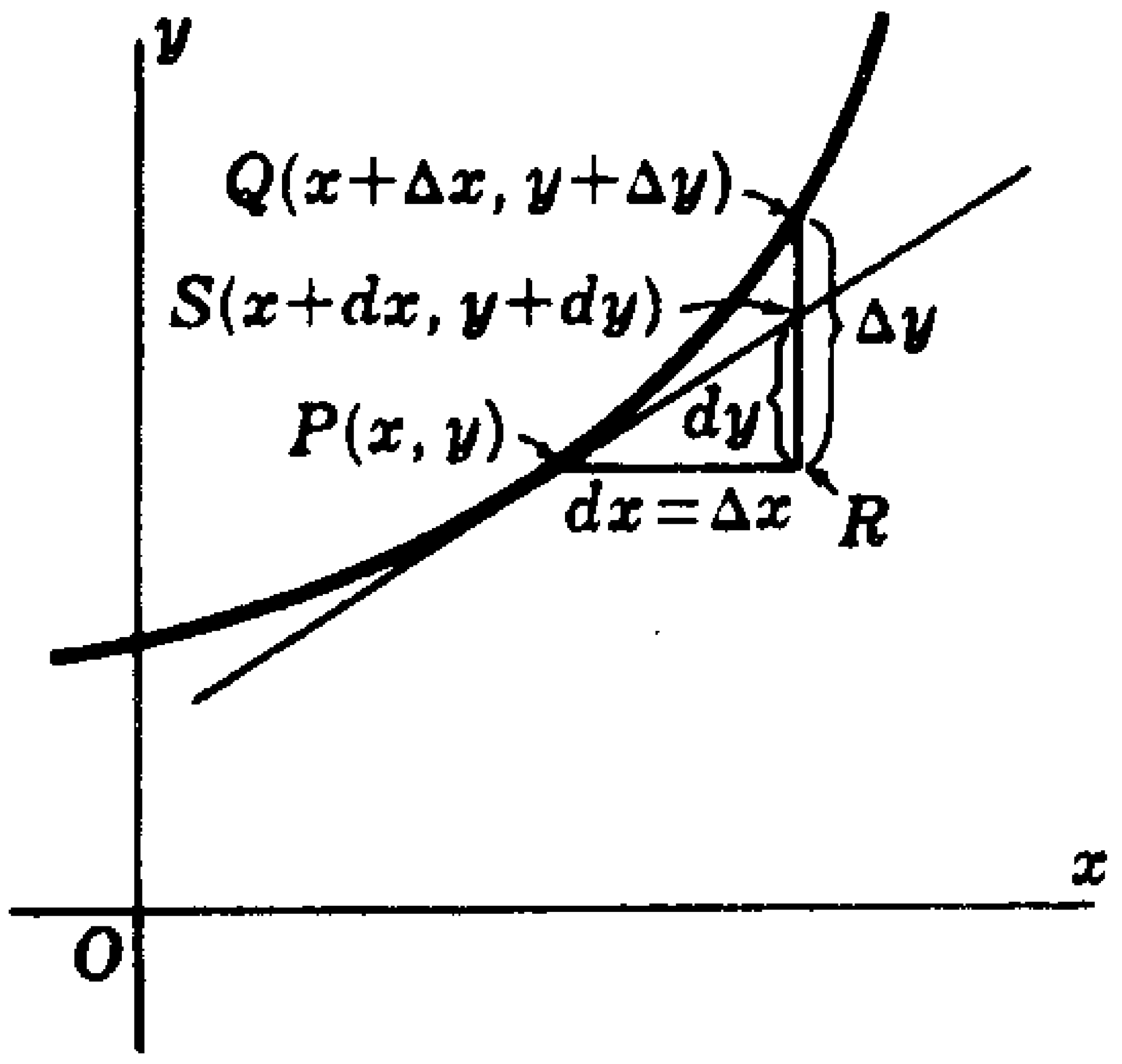
• التفاضلة Differentials

للدالة $y=f(x)$ نعرف الآتى :

1 ـ dx تسمى تفاضلة x ومعطى بالعلاقة $dx=\Delta x$.

2 ـ dy تسمى تفاضلة y ومعطى بالعلاقة $dy=f'(x)dx$.

تعريف التفاضلة للمتغير المستقل أنها تساوى التزايد لهذا المتغير (انظر شكل 4-5) .

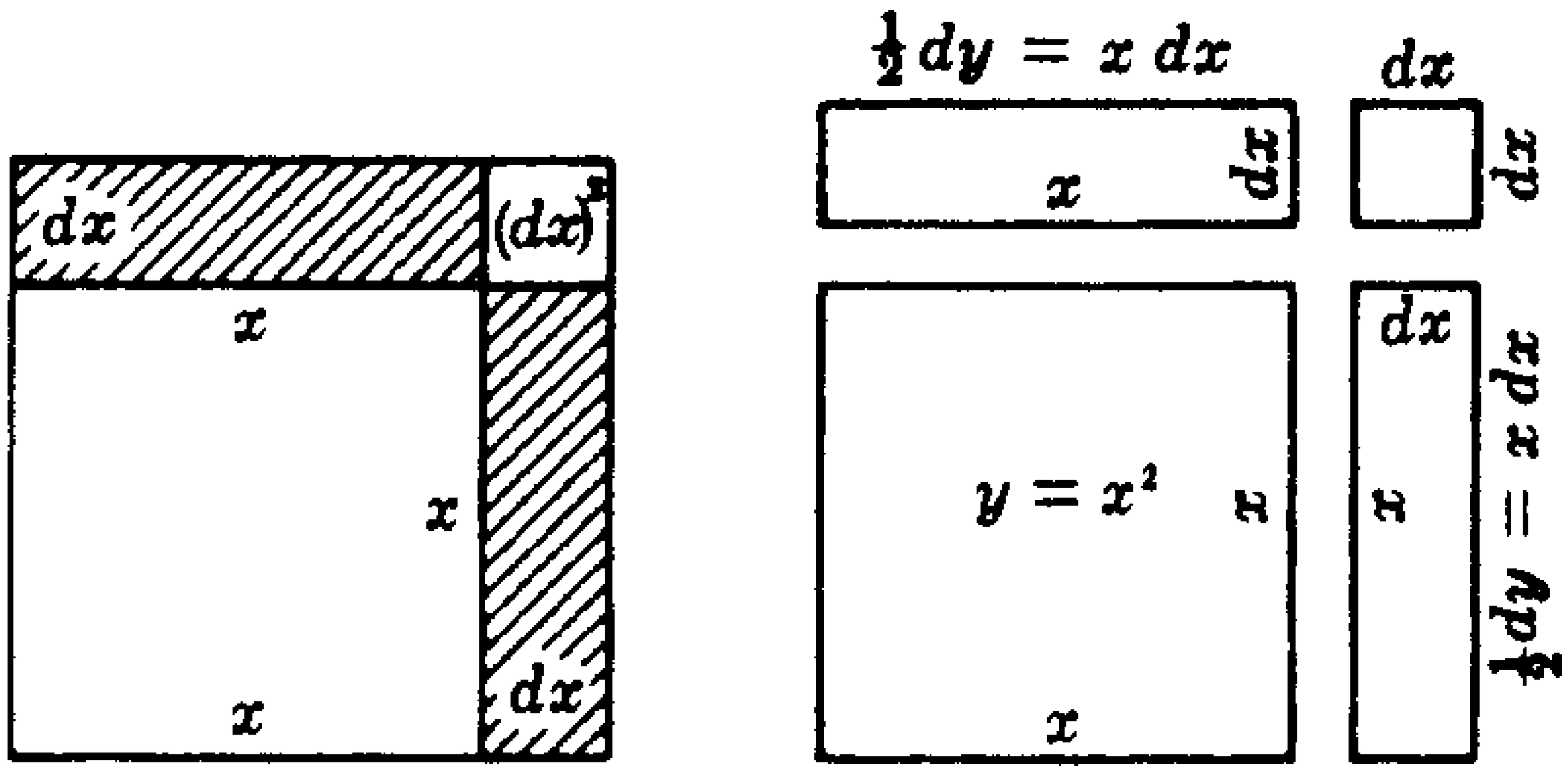


شكل 5-4

التزايد Δy يقيس المسافة الرأسية من نقطة البداية x_0 لو اتبع المنحنى $y = f(x)$ ، بينما التفاضلة dy تقيس المسافة الرأسية من x_0 لو اتبع المماس المنحنى عند x_0 .

مثال 5-8 : إذا كانت $y = x^2$ ، $dy = 2xdx$ بينما $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = 2xdx + (dx)^2$. الشرح أو المعنى الهندسية معطى فى شكل 5-5 . حيث يوضح أن Δy و dy مختلفان عن بعضهما بالمساحة الصغيرة $(dx)^2$.

Example 5-8: When $y = x^2$, dy = 2x while $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 = 2x\,dx + (dx)^2$. A geometric interpretation is given in Figure 5-5, where it can be that Δy and dy differ by the small square of area $(dx)^2$.



شكل 5-5

التفاضلة dy يمكن إيجادها باستخدام التعريف $dy = f'(x)\,dx$ أو بواسطه قواعد نحصل عليها من قواعد إيجاد المشتقات وبعضها كالآتى :

$$d(c)=0 \qquad d(cu)=c\,du \qquad d(uv)=u\,dv+v\,du$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2} \qquad d(\sin u)=\cos u\,du \qquad d(\ln u)=\frac{du}{u}$$

مثال 5-9 : أوجد dy لكل مما يأتى :

Example 5-9: Find dy for each of the following:

(أ) $y = x^3 + 4x^2 - 5x + 6$

$$dy = d(x^3) + d(4x^2) - d(5x) + d(6) = (3x^2 + 8x - 5)dx$$

(ب) $y = (2x^3 + 5)^{3/2}$

$$dy=\frac{3}{2}(2x^3+5)^{1/2}d(2x^3+5)=\frac{3}{2}(2x^3+5)^{1/2}(6x^2\,dx)=9x^2(2x^3+5)^{1/2}dx$$

Approximations by Differentials التقريب بالتفاضلة

إذا كانت $dx = \Delta x$ صغيرة نسبيًا بالمقارنة مع x ، تكون dy مقربة بشكل جيد من Δy ، أى أن $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = dy$.

مثال 5-10 : خذ $y = x^2 + x + 1$ واجعل x تتغير من $x = 2$ إلى $x = 2.01$.

التغير الفعلى فى y هو $\Delta y = [(2.01)^2 + 2.01 + 1] - (2^2 + 2 + 1) = 0.0501$.

والتغير التقريبى فى y . الناتج بأخذ $x = 2$ و $dx = 0.01$ هو

$$dy = f'(x)dx = (2x + 1)dx = [2(2) + 1]\,(0.01) = 0.05$$

Example 5-10: Take $y = x^2 + x + 1$, and let x change from $x = 2$ to $x = 2.01$. The actual change in y is $\Delta y = [(2.01)^2 + 2.01 + 1] - (2^2 + 2 + 1) = 0.0501$. The approximate change in y, obtained by taking $x = 2$ and $dx = 0.01$, is

$$dy = f'(x)dx = (2x + 1)dx = [2(2) + 1]\,(0.01) = 0.05$$

تقريب جذور المعادلات Approximations of Roots of Equations

اجعل $x = x_1$ مقربة جداً من الجذر r للمعادلة $y = f(x) = 0$ واجعل $f(x_1) = y_1 \neq 0$. إذن y_1 تختلف عن 0 بكمية صغيرة . الآن لو تغيرت x_1 إلى r يكون التغير المقابل فى $f(x_1)$ هو $\Delta y_1 = -y_1$. تقريب هذا التغير فى x_1 يعطى بالصيغة $f'(x_1)d\,x_1 = -y_1$ أو

$$dx_1 = -\frac{y_1}{f'(x_1)}$$

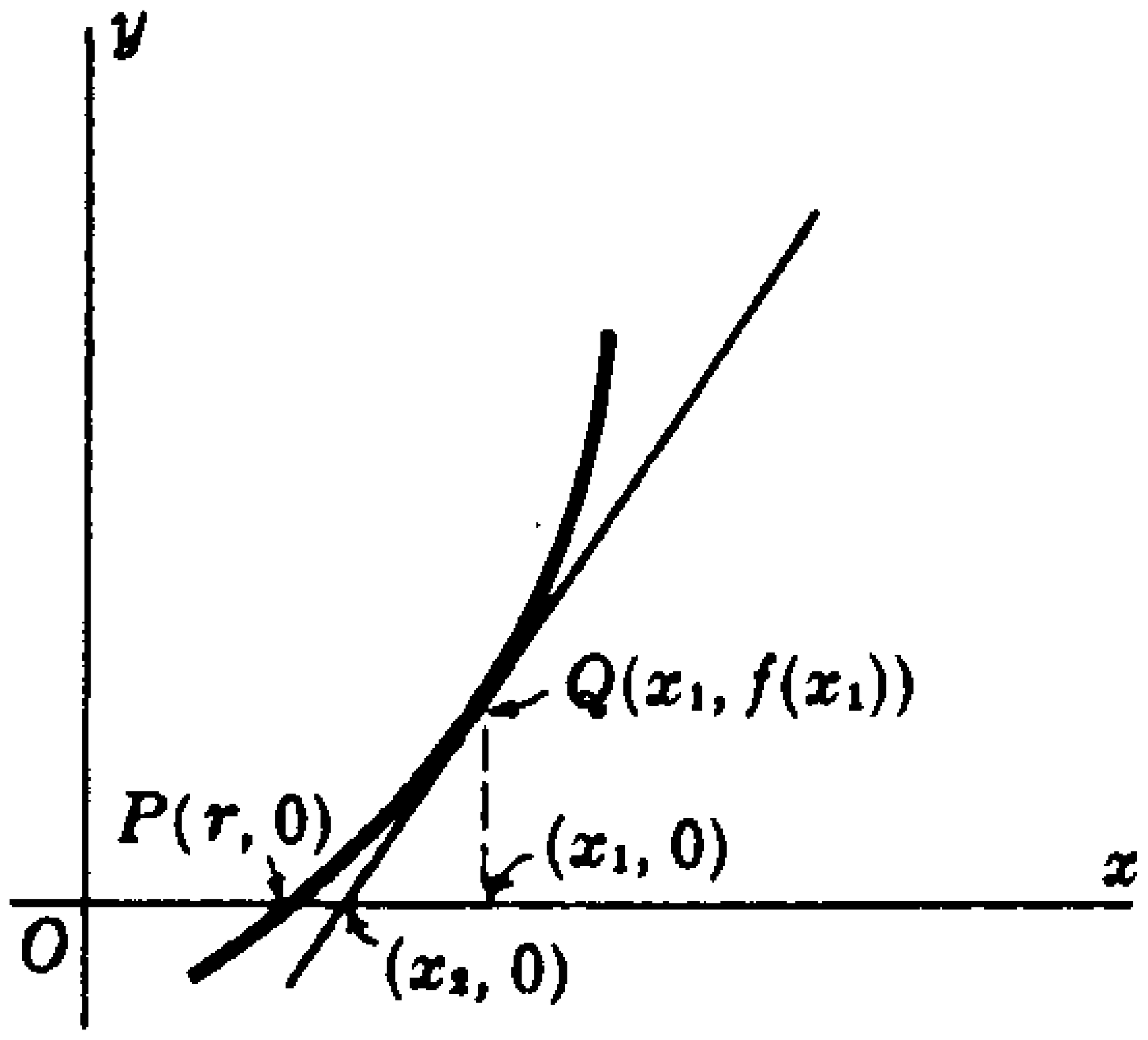
لذلك ، تقريب ثانى وأفضل للجذر r هو

$$x_2 = x_1 + dx_1 = x_1 - \frac{y_1}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

وتقريب ثالث يعطى

$$x_3 = x_2 + dx_2 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

وهكذا . (انظر شكل 5-6) .



شكل 5-6

عندما تكون x_1 ليست قريبة قربًا كافيًا من الجذر سوف نجد أن x_2 تختلف اختلافًا مهمًا عن x_1 . بينما بالوقت عملية إيجاد التقريب تصحح نفسها بنفسها . وغالبًا يكون أبسط أن نعمل تقريب جديد آخر .

مثال 5-11 : قرب الجذور $2 \cos x - x^2 = 0$.

Example 5-11: Approximate the roots of $2 \cos x - x^2 = 0$.

المنحنيان $y = 2 \cos x$ و $y = x^2$ يتقاطعان في نقطتين أحداثهما الأفقي هو 1 و -1 . (لاحظ أن لو r هو جذر واحد إذن -r هو الجذر الأخير) .

استخدم $x_1 = 1$ يعطى

$$x_2 = 1 - \frac{2 \cos 1 - 1}{-2 \sin 1 - 2} = 1 + \frac{2(0.5403) - 1}{2(0.8415) + 2} = 1 + 0.02 = 1.02$$

إذن

$$x^3 = 1.02 - \frac{2 \cos(1.02) - (1.02)^2}{-2 \sin(1.02) - 2(1.02)} = 1.02 + \frac{0.0064}{3.7442}$$
$$= 1.02 + 0.0017 = 1.0217$$

إذن ، لأربعة أرقام عشرية يكون الجذران 1.0217 و -1.0217 .

• رسم المنحنيات Curve Sketching

التماثل Symmetry

يكون المنحنى متماثلة بالنسبة إلى :

1 ـ محور x ، لو أن معادلته لا تتغير إذا وضعنا -y بدلاً من y ، أي أن $f(x) = y$ و $f(x) = -y$ تتحقق في كلاهما .

2 ـ محور y ، لو أن معادلته لا تتغير لو وضعنا x- بدلاً من y ، أى أن

$$f(-x) = f(x)$$

3 ـ نقطة الأصل ، لو أن معادلته لا تتغير لو وضعنا x- و y بدلاً من y- معًا وفى وقت واحد ، أى أن $f(-x) = -f(x)$.

4 ـ الخط $y = x$ لو أن معادلته لم تتغير عندما لا تتغير x , y ، أى أن $y = f(x)$ ومفهوم ضمنيًا أن $x = f(y)$.

النقطة المحصورة Intercepts

النقطة المحصورة هى نقطة على محور نظام إحداثى حيث يمر به منحنى المعادلة أو يعترضه . النقطة المحصورة x نحصل عليها بوضع $y = 0$ فى معادلة المنحنى ونحل لقيم x (لو أمكن) . النقط y المحصورة نحصل عليها بوضع $x = 0$ ونحل لقيم y .

الامتداد Extent

الامتداد الأفقى لمنحنى يعطى بقيم x من حيث وجود المنحنى . الامتداد الرأسى لمنحنى يعطى بالمجال y . النقطة (x_0, y_0) تسمى بالنقطة المعزولة للمنحنى إذا كانت إحداثياتها تحقق معادلة المنحنى بينما لا تحققه أى نقطة أخرى بالجوار .

الخطوط المقاربة Asymptotes

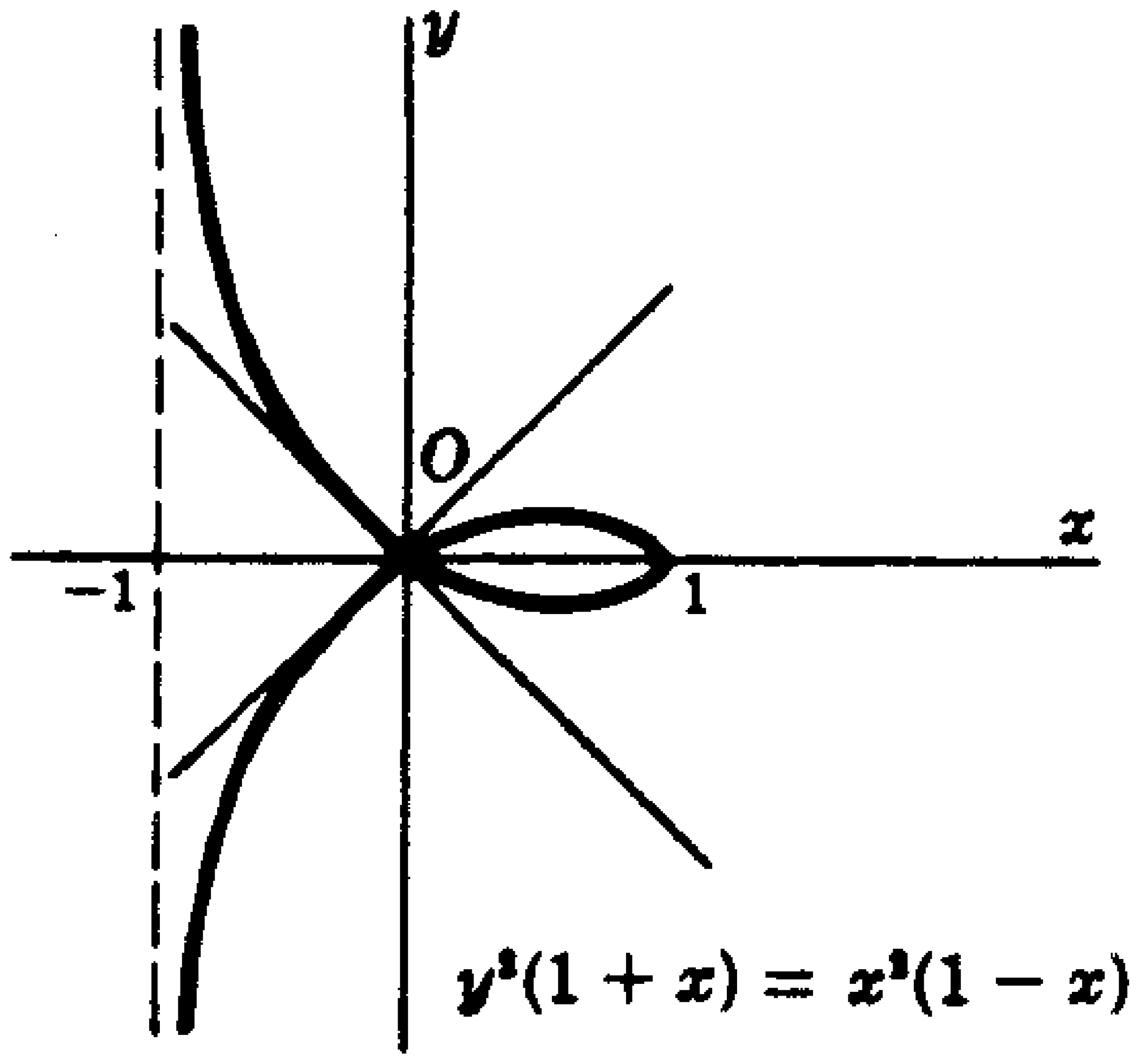
الخط المقارب لمنحنى هو خط افتراضى مقارب جدًا للمنحنى حيث أن الإحداثى الأفقى أو الإحداثى الرأسى للمنحنى يقترب من مالانهاية . وبالتحديد المنحنى $y = f(x)$ الخط المقارب الرأسى هو $x = a$ ويمكن إن يوصف بالحدود اللانهائية $\lim_{x \to a} = \pm\infty$ مثل . الخط

المقارب الأفقـــى y = b يمكـن أن يعـرف بـالحدود عنـد اللانـهائى $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$. النقط العظمى والدنيا ونقط الانقلاب والتقعر للمنحنى قد شرح فى الفصل الرابع .

مثال 5-12 : ناقش وارسم المنحنى $y^2(1 + x) = x^2(1 - x)$

Example 5-12: Discuss and sketch the curve $y^2(1 +x) = x^2(1 - x)$.

المنحنى مرسوم بشكل 5-7 .



شكل 5-7

يمكن أن نكتب معادلة المنحنى بالصيغة الآتية

$$y^2=\frac{x^2(1-x)}{1+x}$$

التماثل : المنحنى متماثل بالنسبة لمحور x .

النقطة المحصورة : نقطة x المحصورة هى $x = 0$ و $x = 1$ ونقطة y المحصورة هى $y = 0$.

الامتداد : للقيمة $x = 1$ ، $y = 0$ وللقيمة $x = -1$ لا يوجد نقط على المنحنى للقيم الأخرى للمتغيرات x ، y^2 لابد أن تكون موجبة لذلك $1 + x$ و $1 - x$

لابد أن يكون لهما نفس الإشارة إذن للنقط التى على المنحنـــى تكـون قيمة x قيدت الـ $-1 < x < 1$. لذلك $-1 < x \leq 1$.

الخطوط المقاربة : $y^2 = \frac{x^2(1-x)}{1+x}$

إذن $y \to \infty$ عندما $x \to -1$. وهكذا $x = -1$ هو خط التقارب الرأسى .

النقط العظمى والدنيا : يتكون المنحنى من جزئين .

$$y = \frac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \quad و \quad y = -\frac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$$

ونبدأ بالجزء الأول

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x-x^2}{(1+x)^{3/2}(1-x)^{1/2}} \quad و \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x-2}{(1+x)^{5/2}(1-x)^{3/2}}$$

القيم الحرجة هى $x = 1$ و $(-1+\sqrt{5})/2$. النقطة

$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{(-1+\sqrt{5})\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}\right)$$

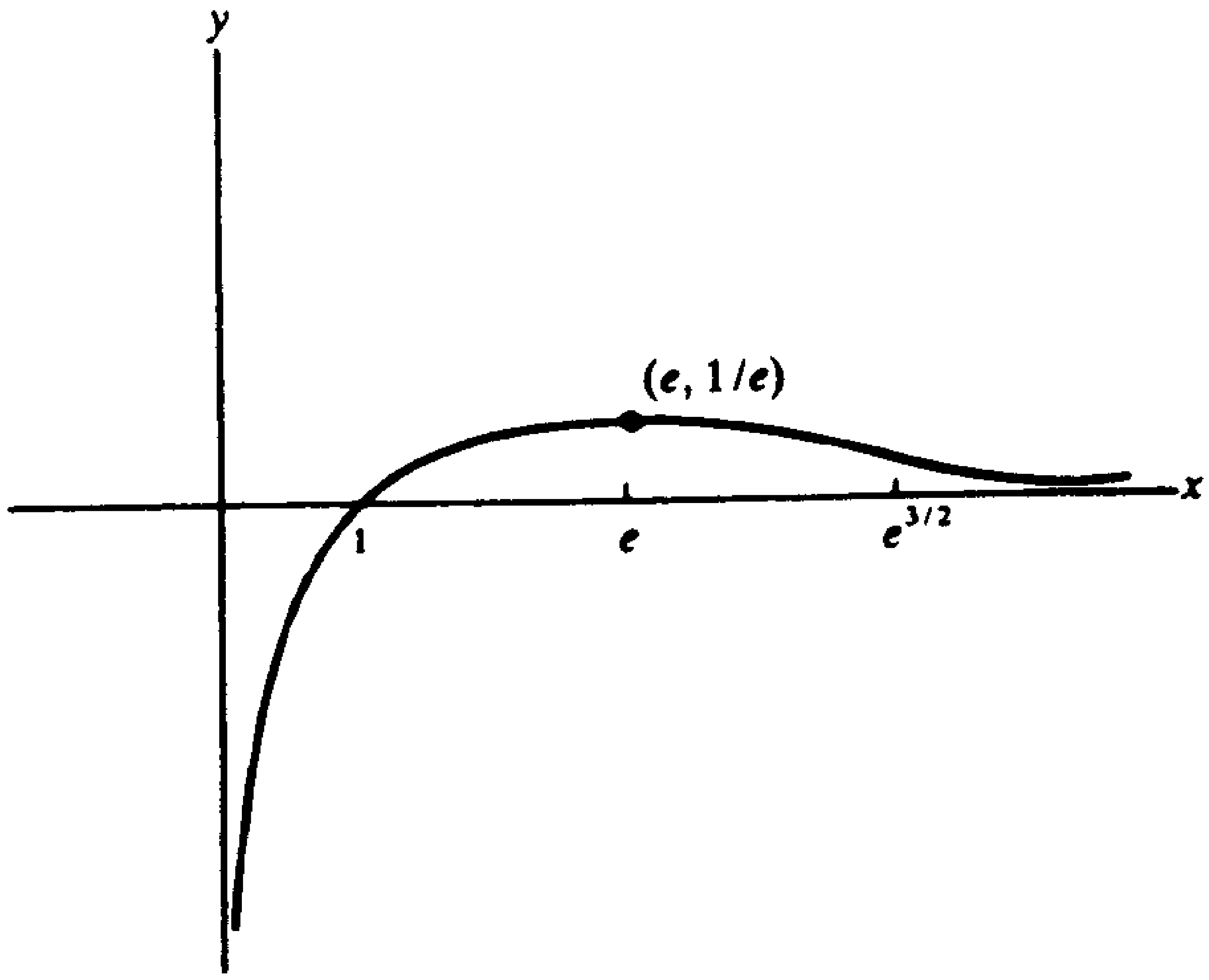
والجزء الثانى مقعر لأعلى .

يمـر المنحنى مـرتين بنقطة الأصل . خطـوط التماس عند نقطة الأصل هى الخطوط $y = x$ ، $y = -x$.

مثال 5-13 : ناقش وارسم المنحنى $y = \frac{\ln x}{x}$

Example 5-13: Discuss and sketch the curve $y = \frac{\ln x}{x}$.

المنحنى مرسوم فى شكل 5-8 .



شكل 5-8

التماثل : لا يوجد تماثل .

النقطة المحصورة : النقطة الوحيدة المحصورة هى $x = 1$.

الامتداد : المنحنى معرف لقيم $x > 0$.

الخطوط المقاربة : محور y هو خط مقارب رأسى .

$\frac{\ln x}{x} \to \infty$ حيث أن $x \to 0^+$. باستخدام قاعدة هوسبيتال $\frac{\ln x}{x} \to 0$.

وحيث إن $x \to +\infty$. إذن محور x الموجب هو خط مقارب أفقى وهذا يعنى أن الخط $y = 0$.

النقط العليا والسفلى : لدينا

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\ln x - 3}{x^3} \quad و \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

إذن النقطة الحرجة هى (e, 1/e) عند النقطة

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{e^3} < 0$$

والتى تعطينا نقطة عظمى نسبية . هناك نقط انقــلاب $2\ln x = 3$ أى أن $(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}})$. المنحنى مقعر لأســفل للقيــم $0 < x < e^{\frac{3}{2}}$ ومقعــر لأعلــى للقيم $x < e^{\frac{3}{2}}$.

• مسائل محلولة Solved Problems

مسألة محلولة 5-1 : حقــق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $y = 4x^3 - x + 5$ فى الفترة $[1, 4]$.

solved problem 5-1 : Verify the mean value theorem for the function $y = 4x^3 - x + 5$ on the interval $[1, 4]$.

الحل : أولاً نحسب قيمة الدالة عند نقطة نهاية الفترة $a = 1$ ، $b = 4$.

$$f(a) = f(1) = 4(1)^3 - 1 + 5 = 4 - 1 + 5 = 8$$

$$f(b) = f(4) = 4(4)^3 - 4 + 5 = 256 - 4 + 5 = 257$$

طبقًا لنظرية القيمة المتوسطة يوجد عدد واحــد فــى الفــترة المفتوحــة (a, b) وهو

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{257 - 8}{4 - 1} = \frac{249}{3} = 83$$

لإيجاد C ضمنيًا . نعين مشتقة الدالة الأصلية المعرفة عند C .

$$f'(x) = 12x^2 - 1 = 83$$

وهذا يمكن تبسيطه :

$$12x^2 = 84$$
$$x^2 = 7$$
$$x = \pm\sqrt{7}$$

حيث إن $+\sqrt{7}$ داخل $(1, 7)$. يخبرنا هذا الرقم بضمان وجود C بواسطة نظرية القيمة المتوسطة .

مسألة محلولة 5-2 : فى رسم دالة . ماذا تكون حقيقتها (شكلها) . إذا كان (أ) المحور الرئيسى ، (ب) الميل f'(x) ، (جـ) المشتقة الثانية f''(x) موجبين .

solved problem 5-2 : In graphing a function, what holds true if (a) the ordinate f(x), (b) the slope f'(x), and (c) the second derivative f''(x) are positive?

الحل :

(أ) عندما تكون f(x) موجبة ، يكون الرسم فوق محور x .

(ب) عندما يكون الميل f'(x) ، يكون ميل الرسم لأعلى .

(جـ) عندما تكون المشتقة الثانية f''(x) موجبة ، يكون الرسم مقعر لأعلى .

مسألة محلولة 5-3 : أعد حل المسألة المحلول 5-2 بفرض كل الصيغ سالبة.

solved problem 5-3: Repeat solved problem 5-2, assuming all entities described are negative?

الحل :

(أ) عندما يكون المحور الرأسى سالب يكون الرسم أسفل محور x .

(ب) عندما يكون الميل f'(x) سالب يكون ميل الرسم لأسفل .

(جـ) عندما تكون المشتقة الثانية f''(x) سالبة يكون المنحنى مقعر لأسفل .

مسألة محلولة 5-4 : أعد حل المسألة المحلول 5-2 بفرض كل الصيغ تغير إشارتها .

solved problem 5-4: Repeat solved problem 5-2, assuming all entities described change sign?

الحل :

(أ) عندما يغير المحور الرأسى f(x) إشارته يتقاطع الرسم مع محور x .

(ب) عندما يغير الميل f'(x) إشارته يكون للرسم مماس أفقى وقيمة عظمى نسبية وأخرى صغرى نسبية .

(جـ) عندما تغير المشتقة الثانية f''(x) إشارتها يكون للرسم نقطة انقلاب .

الفصل السادس

أساسيات الأسلوب التقنى للتكامل وتطبيقاته

Fundamental Integration Techniques and Applications

فى هذا الفصل :

- ✔ **صيغ التكامل الأساسية .**
- ✔ **التكامل الجزئى .**
- ✔ **تكامل الدوال المثلثية .**
- ✔ **تعويض الدوال المثلثية .**
- ✔ **التكامل بالكسور الجزئية .**
- ✔ **تعويضات متنوعة .**
- ✔ **تعويضات أخرى .**
- ✔ **تكامل الدوال الزائدية .**
- ✔ **تطبيقات على التكامل المطلق (الغير محدود) .**
- ✔ **مسائل محلولة .**

إذا كانت $f(x)$ هى دالة مشتقتها $F'(x) = f(x)$ فى فترة معينة لمحـور x ، إذن $F(x)$ تسمى تفاضل عكسى أو تكامل مطلق للدالة $f(x)$. التكـامل المطلق لدالة ليس وحيـدًا ومثـال لذلـك $x^2 + 5$ ، x^2 و $x^2 - 4$ كلـها تكامل مطلق للدالة $f(x) = 2x$ ، حيث إن

$$\frac{d}{dx}(x^2)=\frac{d}{dx}(x^2+5)=\frac{d}{dx}(x^2-4)=2x$$

كل المتكاملات المطلقة للدالة $f(x) = 2x$ موصوفة كلها بالشكل العام لعملية التفاضل العكسى $F(x) = x^2 + C$ ، حيث C يسمى ثابت التكامل وهو أى ثابت افتراضى .

يستخدم الرمز $\int f(x)dx$ لبيان التكامل المطلق للدالة f(x) حيث تسمى الدالة f(x) بالتكاملية (المطلوب تكاملها) إذن نكتب .

$$\int 2x\, dx = x^2+C$$

حيث إن dx تبين أن التكامل العكسى يؤخذ بالنسبة إلى x .

• صيغ التكامل الأساسية

Fundamental Integration Formulas

عدد من الصيغ الآتية تتبع مباشرة صيغ التفاضل القياسية فى الفصول السابقة ، بينما البعض الآخر يمكن اختباره بالتفاضل . الصيغة 25 الموضحة بأسفل ، كمثال يمكن اختبارها ببيان الآتى :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{x}{a}+C\right)=\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int 2x\, dx=x^2+C$$

إشارات القيم المطلقة تظهر فى صيغ كثيرة . ومثال ذلك الصيغة 5 الموضحة بأسفل ، ونكتب

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$$

بدلاً من

$$\int\frac{dx}{x}=\ln x+C \quad \text{لكل } x>0 \qquad\qquad \int\frac{dx}{x}=\ln(-x)+C \quad \text{لكل } x<0$$

1. $\int \frac{d}{dx}[f(x)]dx = f(x) + C$ (النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل)

2. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

3. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx,\ a =$ أى ثابت

4. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,\ m \neq -1$

5. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$

6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1$

7. $\int e^x dx = e^x + C$

8. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

9. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

10. $\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C$

11. $\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + C$

12. $\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

13. $\int \csc x\, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

14. $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

15. $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$

16. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$

17. $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

19. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + C$

21. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

22. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$

25. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C$

26. $\int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C$

The Method of Substitution طريقة التعويض

لإيجاد التفاضل العكسى $\int f(u)du = \int f(g(x))g'(x)dx$ فإنه مــن المفيــد يوضع مكان g(x) متغير جديد u بالتعويض $du = g'(x)\,dx$, $u = g(x)$.

المعادلة

$$\int f(u)du = \int f(g(x))g'(x)dx \qquad (6\text{-}1)$$

تتحقق . بعد إيجاد الجانب اليمن من المعادلة (6-1) نضع g(x) مكان u ، وبذلك نحصل على النتيجة في حدودها الأصلية للمتغير x .
لتحقيق المعادلة (6-1) نلاحظ أن :

$$F(x)=\int f(x)dx,$$

إذن
$$\frac{d}{du}F(x)=\frac{d}{dx}F(x)\frac{dx}{du}=f(x)g'(u)=f(g(u))g'(u)$$

لذا
$$F(x)=\int f(g(u))g'(u)du$$

وهى المعادلة (6-1) . هذه الطريقة تسمى « u ـ التعويض » تطبق على التكاملية والتى تكون على شكل الدوال المضروبة فى المعادلة (6-1) . (مثل هذا الضرب ينتج من قاعدة التسلسل المطبقة على الدالة المركبة (F(g(x)) .

مثال 6-1 : أوجد $\int(x+3)^{11}dx$.

Example 6-1: Evaluate $\int(x+3)^{11}dx$.

لإيجاد التكامل نضع u بدلاً من x + 3 أى نجعل u = x + 3 إذن dx = du ونحصل على

$$\int(x+3)^{11}dx=\int u^{11}du=\frac{1}{12}u^{12}+C=\frac{1}{12}(x+3)^{12}+C$$

التكامل بالفحص السريع Quick Integration by Inspection

صيغتان بسيطتان تمكننا من إيجاد المشتقات العكسية بسرعة . الصيغة الأولى

$$\int g'(x)[g(x)]^r dx=\frac{1}{r+1}[g(x)]^{r+1}+C,\ r\neq-1 \qquad (6\text{-}2)$$

هذه الصيغة نبرزها بملاحظة أن

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{r+1}[g(x)]^{r+1}\right\}=g'(x)[g(x)]^r$$

مثال 6-2 : حقق التكاملات الآتية :

Example 6-2: Evaluate the following integrals:

(أ) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ ، (ب) $\int x\sqrt{x^2+3}\, dx$ (حقق بالتفاضل)

(أ) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int \frac{1}{x}(\ln x)^2 dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$

(ب) $\int x\sqrt{x^2+3}\, dx = \frac{1}{2}\int (2x)(x^2+3)^{1/2} dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3/2}(x^2+3)^{3/2}\right] + C$

$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{x^2+3}\right]^3 + C$

المشتقة الثانية السريعة هى

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + C \qquad (6\text{-}3)$$

هذه الصيغة نبررها بملاحظة أن

$$\frac{d}{dx}(\ln|g(x)|) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

مثال 6-3 : أوجد التكاملات الآتية

Example 6-3: Evaluate the following integrals:

(أ) $\int \cot x\, dx$ ، (ب) $\int \frac{x^2}{x^3-5} dx$

(أ) $\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C$

(ب) $\int \frac{x^2}{x^3-5} dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-5} dx = \frac{1}{3}\ln|x^3-5| + C$

• التكامل الجزئى Integration by Parts

عندما تكون u ، v دوال قابلة للتفاضل للمتغير x ، إذن

$$d(uv)=u\,dv+v\,du \quad \text{or} \quad u\,dv=d(uv)-v\,du \qquad (6\text{-}4)$$

ويتكامل كلاً من الجانبين

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du \qquad (6\text{-}5)$$

عند استخدامها فى التكامل المطلوب لابد أن يقسم التكامل إلى جزئين . الجزء الأول u والجزء الثانى مع dx يكون dv . لهذا السبب التكامل باستخدام المعادلة (6-5) يسمى التكامل الجزئى . قاعدتين عامتين يمكن إعلانهما :

1 ـ الجزء dv لابد أن يمكن تكامله .

2 ـ $\int v\,du$ لابد ألا يكون معقد أكثر من $\int v\,du$.

مثال 6-4 : أوجد $\int x^3e^{x^2}dx$.

Example 6-4: Find $\int x^3e^{x^2}dx$.

اجعل $u=x^2$ و $dv=e^{x^2}x\,dx$ ، إذن $dv=2x\,dx$ و $V=\frac{1}{2}e^{x^2}$ (بواسطة u- التعويض) . الآن باستخدام المعادلة (6-5) .

$$\int x^3e^{x^2}dx=\frac{1}{2}x^2e^{x^2}-\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}x^2e^{x^2}-\frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

(ونطبق مرة أخرى u- التعويض لإيجاد التكامل $\int xe^{x^2}dx$)

مثال 6-5 : أوجد $\int \ln(x^2+2)dx$.

Example 6-4: Find $\int \ln(x^2+2)dx$.

خذ $u=\ln(x^2+2)$ ، $dv=dx$ إذن $du=\frac{2x\,dx}{x^2+2}$ و $v=x$. بواسطة المعادلة (6-5) .

$$\int \ln(x^2+2)dx=x\ln(x^2+2)-\int\frac{2x^2}{x^2+2}dx$$

$$= x \ln(x^2+2) - \int \left(2 - \frac{4}{x^2+2}\right) dx$$

$$= x \ln(x^2+2) - 2x + 2\sqrt{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

الصيغ المخفضة (المختصرة) Reduction Formulas

المطلوب إيجاد تطبيق ناجح للتكامل الجزئى لإيجاد تكامل يمكن تخفيضه باستخدام الصيغ المخفضة .

ملاحظة

عمومًا الصيغة المختصرة توجد تكامل جديد له نفس شكل التكامل الأصلى لكن بتزايد أس أو تقليل . الصيغ المختصرة تنجح إذا أنتجت تكامل يمكن حسابه . والصيغ المختصرة هى :

$$\int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^m} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{(2m-2)(a^2 \pm x^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^{m-1}}\right], \quad m \neq 1 \qquad (6\text{-}7)$$

$$\int (a^2 \pm x^2)^m dx = \frac{x(a^2 \pm x^2)^m}{2m+1} + \frac{2ma^2}{2m+1}\int (a^2 \pm x^2)^{m-1} dx, \quad m \neq -\frac{1}{2} \qquad (6\text{-}8)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^m} = -\frac{1}{a^2}\left[\frac{x}{(2m-2)(x^2 - a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{m-1}}\right], \quad m \neq 1 \qquad (6\text{-}9)$$

$$\int (x^2 - a^2)^m dx = \frac{x(x^2 - a^2)^m}{2m+1} - \frac{2ma^2}{2m+1}\int (x^2 - a^2)^{m-1} dx, \quad m \neq -\frac{1}{2} \qquad (6\text{-}10)$$

$$\int x^m e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^m e^{ax} - \frac{m}{a}\int x^{m-1} e^{ax} dx \qquad (6\text{-}11)$$

$$\int \sin^m x\, dx = -\frac{\sin^{m-1}x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2}x\, dx \tag{6-12}$$

$$\int \cos^m x\, dx = \frac{\cos^{m-1}x \sin x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2}x\, dx \tag{6-13}$$

$$\int \sin^m x \cos^m x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2}x\, dx$$

$$= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2}x \cos^n x\, dx,\ m \neq -n \tag{6-14}$$

$$\int x^m \sin bx\, dx = -\frac{x^m}{b}\cos bx + \frac{m}{b}\int x^{m-1}\cos bx\, dx \tag{6-15}$$

$$\int x^m \cos bx\, dx = \frac{x^m}{b}\sin bx - \frac{m}{b}\int x^{m-1}\sin bx\, dx \tag{6-16}$$

مثال 6-6 : أوجد (أ) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{5/2}}$ ، (ب) $\int (9+x^2)^{3/2}dx$

Example 6-6: Find (a) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{5/2}}$ and (b) $\int (9+x^2)^{3/2}dx$

(أ) حيث إن الدالة الأسية فى المقام يمكن تخفيضها بقيمة 1 . نستخدم هذه الصيغة مرتين لنحصل على

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{5/2}} = \frac{x}{3(1+x^2)^{3/2}} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{x}{3(1+x^2)^{3/2}} + \frac{2}{3}\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} + C$$

(ب) باستخدام صيغة مخفضة مناسبة ، نحصل على

$$\int (9+x^2)^{3/2}dx = \frac{1}{4}x(9+x^2)^{3/2} + \frac{27}{4}\int (9+x^2)^{1/2}dx$$

$$= \frac{1}{4}x(9+x^2)^{3/2} + \frac{27}{4}\left[x(9+x^2)^{1/2} + 9\ln\left(x+\sqrt{9+x^2}\right)\right] + C$$

• تكامل الدوال المثلثية Trigonometric Integrals

المتطابقات الآتية والتى فى الجدول 1-4 قد استخدمت لإيجـاد بعـض تكاملات الدوال المثلثية فى هذا الجزء .

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

3. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

4. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

5. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

6. $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

7. $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$

8. $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

9. $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

10. $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{1}{2}x$

11. $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{1}{2}x$

12. $1 \pm \sin x = 1 \pm \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$

قاعدتان مهمتان للتعويض فى بعض الحالات البسيطة .

1 ـ للتكامل $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ لو m عدد فردى ، نعوض $u = \cos x$ لو أن n عدد فردى نعوض $u = \sin x$.

2 ـ للتكامل $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$: لو أن n عدد زوجى ، نعوض $u = \tan x$
لو أن m عدد فردى ، نعوض $u = \sec x$.

مثال 6-7 : أوجد التكامل $\int \sin^2 x\, dx$

Example 6-7: Evaluate the integral $\int \sin^2 x\, dx$.

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

• تعويض الدوال المثلثية Trigonometric Substitutions

بعض التكاملات يمكن تبسيطها بالتعويضات الآتية :

1 ـ لو تحتوى التكاملية على $\sqrt{a^2-x^2}$ ، نعوض $x = a \sin z$.

2 ـ لو تحتوى التكاملية على $\sqrt{a^2+x^2}$ ، نعوض $x = a \tan z$.

3 ـ لو تحتوى التكاملية على $\sqrt{x^2-a^2}$ ، نعوض $x = a \sec z$.

وأكثر شمولاً ، التكاملية التى تحتوى على أحد الأشكال الآتية

$\sqrt{a^2-b^2x^2}$ ، $\sqrt{a^2+b^2x^2}$ أو $\sqrt{b^2x^2-a^2}$

لكن ليس هناك أى معامل غير منطقى (أصم) يمكن تحويله إلى معامل آخر للدوال المثلثية إلى متغير جديد كما يأتى

لأجل	استخدم	للحصول على
$\sqrt{a^2-b^2x^2}$	$x = \frac{a}{b}\sin z$	$a\sqrt{1-\sin^2 z} = a\cos z$
$\sqrt{a^2+b^2x^2}$	$x = \frac{a}{b}\tan z$	$a\sqrt{1+\tan^2 z} = a\sec z$
$\sqrt{b^2x^2-a^2}$	$x = \frac{a}{b}\sec z$	$a\sqrt{\sec^2 z - 1} = a\tan z$

جدول 6-1

لكل حالة ، يعطى التكامل مصطلح فى المتغير z . والمصطلح المقابل فى المتغير الأصلى يمكن الحصول عليه باستخدام المثلث القائم كما هو موضح بالمثال التالى :

مثال 6-8 : أوجد $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

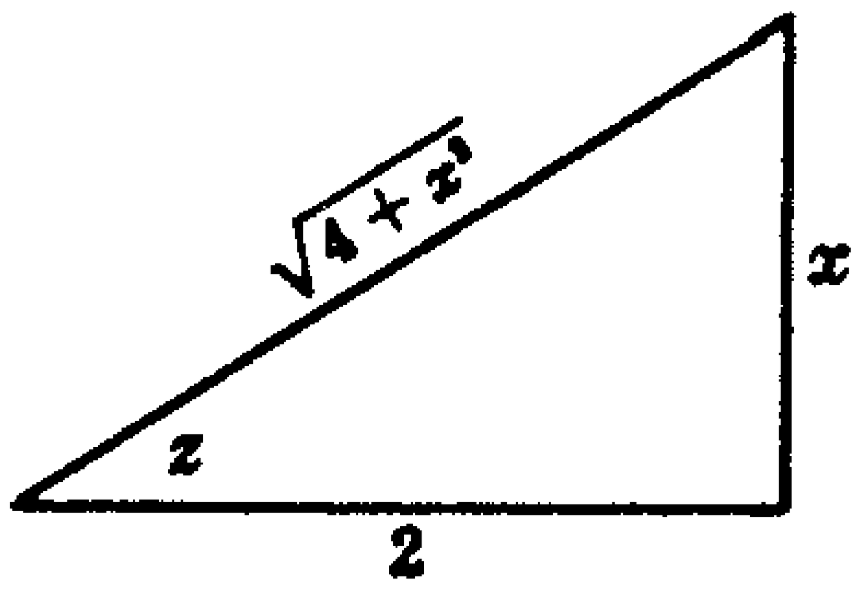
Example 6-8: Find $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

اجعل $x = 2\tan z$ ، لأن x , z لهما علاقة ببعضهما كما فى شكل 6-1 .

إذن

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2 z\, dz}{(4\tan^2 z)(2\sec z)} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec z}{\tan^2 z} dz$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^{-2} z \cos z\, dz = -\frac{1}{4\sin z} + C = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$$



شكل 6-1

• التكامل بالكسور الجزئية

Integration by Partial Fractions

دالة متعددة الحدود للمتغير x تكون على الشكل

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \bullet\bullet\bullet + a_{n-1}x + a_n,$$

حيث إن a هى ثوابت ، $a_0 \neq 0$ ، n تسمى درجة متعددة الحدود وهى عدد صحيح غير سالب .

كل متعددة حدود بمعاملات حقيقية يمكن استنتاجها (نظريًا على الأقل) كحاصل ضرب معامل خطى على الشكل $ax+b$ ومعامل تربيعى على الشكل ax^2+bx+c (متعددة الحدود ذات درجة 1 أو أعلى تسمى غير مختصرة إذا لم يمكن فكها إلى متعددة حدود ذات درجة أقل) . الصيغة التربيعية ax^2+bx+c الغير مختصرة لو ولو فقط $b^2-4ac<0$ (فى هذه الحالة جذور متعددة الحدود $ax^2+bx+c=0$ غير حقيقية) .

> **تذكر**
> لو أن هناك دالتين متعددتى الحدود لهما نفس الدرجة وتساوى فيها كل قيم المتغير ، إذن تتساوى معاملات الأس للمتغير فيهما .

مثال 6-9 : (أ) x^2-x+1 غير مختصرة ، حيث $(-1)^2-4(1)(1)=-3<0$

(ب) x^2-x-1 غير مختصرة ، حيث $(-1)^2-4(1)(-1)=5>0$

Example 6-9: (a) x^2-x+1 is irreducible, since $(-1)^2-4(1)(1)=-3<0$.

(b) x^2-x-1 is not irreducible, since $(-1)^2-4(1)(-1)=5>0$.

فى الحقيقة

$$x^2-x-1=\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

الدالة $F(x)=f(x)/g(x)$ ، حيث $f(x)$ و $g(x)$ متعددتى الحدود وتسمى هذه الدالة بالكسر الجزئى . لو أن درجة $f(x)$ أقل من درجة $g(x)$ تسمى $F(x)$ دالة صحيحة . ولو بالعكس تسمى $F(x)$ دالة غير صحيحة . الكسر الجزئى الغير صحيح يمكن استنتاجه كمجموع متعددة الحدود مع كسر جزئى صحيح ، أى

$$\frac{x^3}{x^2+1}=x-\frac{x}{x^2+1}$$

كل كسر جزئى صحيح يمكن استنتاجه (نظريًا على الأقـل) كمجمـوع كسور أبسط (كسور جزئية) مقامها على شكل $(ax+b)^n$ و $(ax^2+bx+c)^n$ ، n عدد صحيح موجب .

أربع حالات تعتمد على حالة معاملات المقام .

حالة I : معامل خطى واضح

لكل معامل خطى $ax+b$ يحـدث مـرة واحـدة فـى بسطه الكسر الجزئى الصحيح ، يوجد كسر جزئى وحيد على الشكل $\frac{A}{ax+b}$.

حيث A ثابت يمكن تعيينه بحل المعادلات الآتية :

مثال 6-10 : أوجد $\int \frac{dx}{x^2-4}$.

Example 6-10: Find $\int \frac{dx}{x^2-4}$.

نحلل المقام إلى $(x-2)(x+2)$ ونكتب

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

وباختصار المعاملات نحصل على

$$1 = A(x+2) + B(x-2) \qquad (6\text{-}17)$$

أو

$$1 = (A+B)x + (2A-2B)$$

يمكن حساب الثوابت بواسطة طريقتين .

الطريقة العامة : بمساواة معاملات x التى لها نفس الأس معادلة (6-18) والحل فى وقت واحد للثوابت . إذن

$$A+B=0 \quad \text{و} \quad 2A-2B=1$$

وهذا يعطى

$$B=-\frac{1}{4} \quad \text{و} \quad A=\frac{1}{4}$$

الطريقة القصيرة : عوض فـــى المعادلـة (6-17) بـالقيم x = 2 و x = -2 للحصول على 1 = 4 A و 1 = -4B ، إذن

$$A=\frac{1}{4} \quad \text{و} \quad B=-\frac{1}{4}$$

بأى من الطريقتين يكون لدينا

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{\frac{1}{4}}{x-2}-\frac{\frac{1}{4}}{x+2}$$

إذن

$$\int\frac{dx}{x^2-4}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x+2|+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$$

حالة II : العوامل الخطية المكررة

لكل معامل خطى ax + b يحدث عـــدد n مـن المـرات فـى مقـام كسـر جزئى يكون هناك مجموع n من الكسور الجزئية على الشكل .

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

حيث A هى ثوابت يمكن إيجادها

مثال 6-11 : أوجد $\int\frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}$

Example 6-11: Find $\int\frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}$

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x + 1)(x - 1)^2$$

إذن

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

و

$$3x + 5 = A(x - 1)^2 + B(x + 1)(x - 1) + C(x + 1)$$

لأجل $x = -1$ ، $2 = 4x$ و $A=\frac{1}{2}$. لأجل $x = 1$ ، $8 = 2c$ و $C = 4$.

لحساب الثوابت الباقية نستخدم أى قيمة أخرى للمتغير x ، مثلاً $x = 0$ ،

لأجل $x = 0$ ، $5 = A - B + C$ و $B=-\frac{1}{2}$. إذن

$$\int\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+4\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{4}{x-1}+C$$

$$=-\frac{4}{x-1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$$

حالة III : معامل تربيعى واضح

لكل معامل تربيعى غير مختصر ax^2+bx+c يحدث مرة فى مقام كسر جزئى صحيح ، يكون هناك كسر جزئى على الشكل .

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

حيث إن A , B ثابتان يمكن حسابهما .

مثال 6-12 : أوجد $\int\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx$

Example 6-12: Find $\int\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx$

$$x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$$

نكتب

$$\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$$

نحصل على

$$x^3 + x^2 + x + 2 = (Ax + B)(x^2 + 2) + (Cx + D)(x^2 + 1)$$
$$= (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + (2A + C)x + (2B + D)$$

لذلك $A + C = 1$ ، $B + D = 1$ ، $2A + C = 1$ ، $2B + D = 2$. بالحل معًا نحصل على $A = 0$ ، $B = 1$ ، $C = 1$ ، $D = 0$. لذلك .

$$\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x\,dx}{x^2+2} = \arctan x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right) + C$$

حالة IV : معامل تربيعي مكرر

لكل معامل تربيعي غير مختصر ax^2+bx+c يحدث n مرة في مقام كسر جزئي صحيح ، يكون هناك مجموع عدد n من الكسور الجزئية على الشكل :

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

حيث إن A , B هي ثوابت يمكن حسابها .

مثال 6-13 : أوجد $\int \frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{\left(x^2+2\right)^3}dx$

Example 6-13: Find $\int \frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{\left(x^2+2\right)^3}dx$

نكتب

$$\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}+\frac{Ex+F}{(x^2+2)^3}$$

إذن

$$\begin{aligned} x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4 &= (Ax+B)(x^2+2)^2+(Cx+D)(x^2+2)+Ex+F \\ &= Ax^5+Bx^4+(4A+C)x^3+(4B+D)x^2 \\ &\quad +(4A+2C+E)x+(4B+2D+F) \end{aligned}$$

ونستنتج $A=1$ ، $B=-1$ ، $C=0$ ، $D=0$ ، $E=4$ ، $F=0$. لذلك التكامل المعطى يكون

$$\int\frac{x-1}{x^2+2}dx+4\int\frac{x}{(x^2+2)^3}dx=$$

$$\frac{1}{2}\ln\,(x^2+2)-\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{(x^2+2)^2}+C$$

• تعويضات متنوعة Miscellaneous Substitutions

إذا كانت التكاملة هى دالة جذرية على الشكل الآتى :

1 - $\sqrt[n]{ax+b}$ ، إذن نعوض $ax+b=z^n$ ونضعها مكان التكاملة الجذرية .

2 - $\sqrt{q+px+x^2}$ ، إذن نعوض $q+px+x^2=(z-x)^2$ ونضعها مكان التكاملة الجذرية .

3 - $\sqrt{q+px-x^2}=\sqrt{(\alpha+x)(\beta-x)}$ ، إذن نعوض

$q+px-x^2=(\alpha+x^2)z^2$ أو $q+px-x^2=(\beta-x^2)z^2$

ونضعها مكان التكاملة الجذرية

مثال 6-14 : أوجد $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$

Example 6-14: Find $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$

دع $1 - x = z^2$. إذن $x = 1 - z^2$ ، $dx = -2z\,dz$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} = \int \frac{-2z\,dz}{(1-z^2)z} = -2\int \frac{dz}{1-z^2}$$

$$= -\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + C = \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right| + C$$

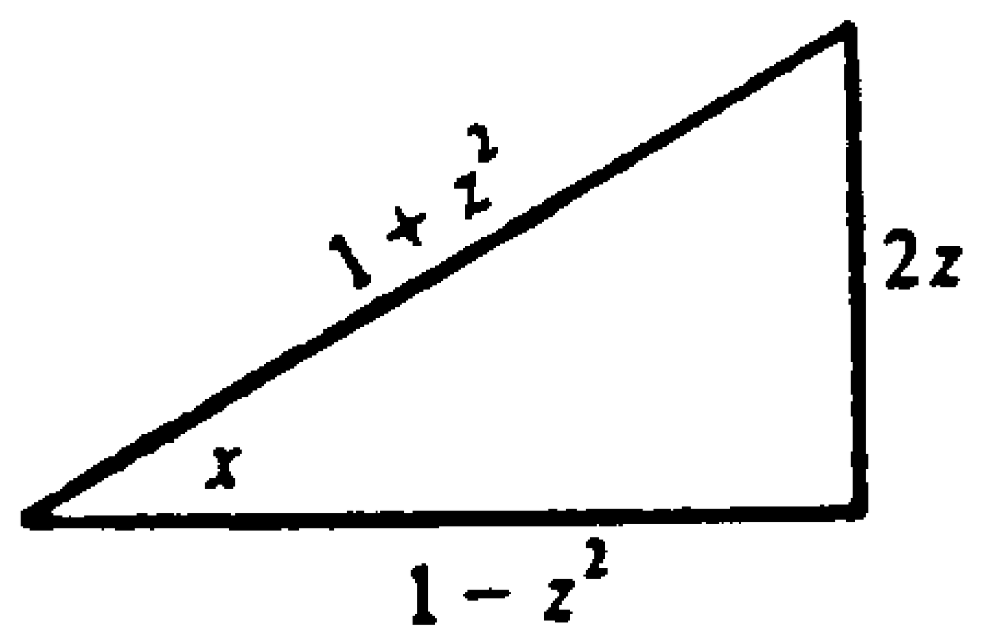
• تعويضات أخرى Other Substitutions

التعويض $x = 2 \arctan z$ سوف يحل محل أى دالة كسرية. $\sin x$ و $\cos x$ مع دالة كسرية للمتغير z ، حيث

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}\ ; \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}\ ; \quad dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$$

أول وثانى علاقة حصلنا عليهما من شكل (6-2) ، والثالثة بتفاضل $x = 2$ arcton z . بعد التكامل ، استخدم

$z = \tan \frac{1}{x} x$ لإعادة المتغير الأصلى



شكل 6-2

مثال 6-15 : أوجد التكامل الآتى

Example 6-15: Evaluate the following integral

$$\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x}=\int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}-\frac{1-z^2}{1+z^2}}=\int \frac{dz}{z(1+z)}$$

$$=\ln|z|-\ln|1+z|+C=\ln\left|\frac{z}{1+z}\right|+C=\ln\left|\frac{\tan\frac{1}{2}x}{1+\tan\frac{1}{2}x}\right|+C$$

• تكامل الدوال الزائدية

Integration of Hyperbolic Functions

الصيغ الآتية هى نتيجة مباشرة لتفاضل الصيغ التى فى الفصل الثالث .

$$\int \sinh x\,dx=\cosh x+C$$

$$\int \cosh x\,dx=\sinh x+C$$

$$\int \tanh x\,dx=\ln \cosh x+C$$

$$\int \coth x\,dx=\ln|\sinh x|+C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x\,dx=\tanh x+C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 x\,dx=-\coth x+C$$

$$\int \operatorname{sech} x \tanh x\,dx=-\operatorname{sech} x+C$$

$$\int \operatorname{csch} x \coth x\,dx=-\operatorname{csch} x+C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sinh^{-1}\frac{x}{a}+C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + C,\ x > a > 0$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a} + C,\ x^2 < a^2$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = -\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{x}{a} + C,\ x^2 > a^2$$

مثال 6-16 : أوجد التكاملات الآتية

Example 6-16: Evaluate the following integral

$$\int \sinh\frac{1}{2}x\,dx \text{ and } \int \operatorname{sech}^2(2x-1)\,dx$$

$$\int \sinh\frac{1}{2}x\,dx = 2\int \sinh\frac{1}{2}x\,d\left(\frac{1}{2}x\right) = 2\cosh\frac{1}{2}x + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2(2x-1)\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sech}^2(2x-1)\,d(2x-1) = \frac{1}{2}\tanh(2x-1) + C$$

• تطبيقات على التكامل المطلق (الغير محدود)

Applications of Indefinite Integrals

عندما تكون المعادلة $y = f(x)$ لمنحنى معلومة ، يعطى الميل m عند أى نقطة $P(x, y)$ بالمعادلة $m = f'(x)$. وبالعكس عندما يكون ميل المنحنى عند نقطة $P(x, y)$ عليه معطى بالعلاقة $m = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ ، ممكن إيجاد مجموعة من المنحنيات $y = f(X) + C$ عن طريق التكامل .

تذكر

لإيجاد أحد من مجموعة المنحنيات لابد من تحديد أو تعيين قيمة دقيقة للثابت C ، وهذا يمكن عمله بواسطة وصف المنحنى المار خلال النقطة المعطاة . وهذا معروف بالظروف الابتدائية .

مثال 6-17 : أوجد المعادلة لمجموعة المنحنيات التى ميلها عنــد أى نقطة P(x, y) هو $m = 3x^2y$. أوجد معادلة المنحنى من هذه المجموعــة التى يمر بالنقطة (0, 8) .

Example 6-17: Find the equation of the family of curves whose slope at any point P(x, y) is $m = 3x^2y$. Find the equation of the curve of the family which passes through the point (0, 8)

حيث $m = \frac{dy}{dx} = 3x^2y$ ، لدينا $\frac{dy}{y} = 3x^2dx$ ، إذن $\ln y = x^3 + C = x^3 + \ln C$ و $y = ce^{x^3}$ عند $x = 0$ و $y = 8$ إذن $8 = ce^0 = c$. المعادلة المطلوبة هـى $y = 8e^{x^3}$. يمكن أيضًا استخدام التكامل المطلق لوصف معادلات الحركة . المعادلة $s = f(t)$ ، حيث إن s هى المسافة خلال الزمن t لجسم من نقطة ثابتة على مسارها (خط مستقيم) تعرف تمامًا حركة الجســم . الســرعة والعجلة عند الزمن t هى :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t) \quad \text{و} \quad v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

وبالعكس لو أن السرعة (أو العجلة) معلومة عند زمن t مـع مكـان (أو سرعة) عند أى لحظة معطاة ، عادة عند $t = 0$. يمكن الحصــول علـى معادلة الحركة .

مثال 6-18 : تدحرجت كرة على مستوى حشيشى بسرعة ابتدائية 25 قدم لكل ثانية (ft/sec) . نتيجة للاحتكاك قلت الســرعة بمعــدل 6 ft/sec^2 .

إلى أى مسافة تدحرجت الكرة ؟

Example 6-18: A ball is rolled over a level lawn with initial velocity 25 feet per second (ft/sec). Due to friction velocity decreases at the rate of 6 ft/sec^2. How far with the ball roll?

هنا $\frac{dv}{dt} = -6$ لذلك $V = -6t + C$ عند $t = 0$ ، $V = 25$ ، إذن $C_1 = 25$ و $V = -6t + 25$.

حيث $V=\frac{ds}{dt}=-6t+25$ ، بالتكامل ينتج $S=-3t^2+25t+C_2$.

حيث $t=0$ ، $s=0$ ، لذلك $C_2=0$ و $S=-3t^2+25t$.

عند $V=0$ ، $t=\frac{25}{6}$ إذن تدحرجت الكرة لمدة $\frac{25}{6}\sec$ قبل أن تسكن .

فى هذا الزمن تدحرجت الكرة مسافة

$$s=-3\left(\frac{25}{6}\right)^2+25\left(\frac{25}{6}\right)=-\frac{625}{12}+\frac{625}{6}=\frac{625}{12}\text{ ft}$$

• مسائل محلولة Solved Problems

مسألة محلولة 6-1 : أوجد التكامل المطلق

solved problem 6-1: Evaluate the indefinite integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

الحل :

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\int x^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+C=3x^{\frac{1}{3}}+C$$

مسألة محلولة 6-2 : أوجد التكاملات المحدودة

solved problem 6-2: Evaluate the indefinite integrals

(أ) $\int \tan x\, dx$ (ب) $\int \tan 2x\, dx$

الحل :

(أ) $\int \tan x\, dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx$

$$=-\ln|\cos x|+C=\ln|\sec x|+C$$

(ب) $\int \tan 2x\, dx=\frac{1}{2}\int (\tan 2x)(2\,dx)=\frac{1}{2}\ln|\sec 2x|+C$

مسألة محلولة 6-3 : أوجد التكامل

solved problem 6-3: Evaluate the integral

$$\int \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta$$

الحل : نبدأ بوضع التعاريف الآتية

$u = \sin \theta$ أو $du = \cos \theta \, d\theta$

ولذلك

$$\int \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta = \int u^2 \, du$$

$$= \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \frac{\sin^3 \theta}{3} + C$$

مسألة محلولة 6-4 : أوجد التكامل

solved problem 6-4: Evaluate the integral

$$\int (1+x^3)^5 x^2 \, dx$$

الحل : أولاً نبدأ بتعريف $u = 1 + x^3$

ويتبع ذلك

$du = 3x^2 dx$ أو $\frac{du}{3} = x^2 dx$

إذن

$$\int (1+x^3)^5 x^2 \, dx = \int u^5 \frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \int u^5 du$$

$$= \frac{1}{3} \frac{u^6}{6} + C$$

$$= \frac{(1+x^3)^6}{18} + C$$

مسألة محلولة 6-5 : أوجد التكامل

solved problem 6-5: Evaluate the integral

$$\int x \ln x \, dx$$

الحل : نبدأ أولاً بالتعريف $u = \ln x$

والذى يتضمن

$$d(\ln x) = \frac{dx}{x}$$

إذن

$$\int x \ln x \, dx = \int (\ln x)(x \, dx)$$

حيث $u = \ln x$ و $dv = x \, dx$. وبالتكامل الجزئى ينتج

$$\int x \ln x \, dx = \int (\ln x)(x \, dx)$$

$$= (\ln x)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x \, dx}{2}$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

مسألة محلولة 6-6 : أوجد التكامل

solved problem 6-6: Evaluate the integral

$$\int x^2 e^x \, dx$$

الحل : هذه مشكلة تحتاج إلى التكامل الجزئى . نبدأ بالتعريف .

$u = x^2 \quad du = 2x \, dx$

$dv = e^x \, dx \qquad v = e^x$

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int e^x \, 2x \, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x \, dx$$

التكامل $\int xe^x\,dx$ أيضًا يحل باستخدام التكامل الجزئى ليعطى

$$\int xe^x\,dx = xe^x - e^x$$

لذلك

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\left[xe^x - e^x\right] + C$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

مسألة محلولة 6-7 : أوجد التكامل

solved problem 6-7: Evaluate the integral

$$\int_1^5 \frac{x^2+1}{2x-3}\,dx$$

الحل : نبدأ بالتعويض $u = 2x - 3$

ومن ذلك

$$du = 2dx \quad ; \quad dx = \frac{du}{2} \quad ; \quad x = \frac{u+3}{2}$$

لذلك

$$\int \frac{x^2+1}{2x-3}\,dx = \int \frac{\left[\frac{(u+3)}{2}\right]^2+1}{u}\,\frac{du}{2}$$

$$= \int \frac{u^2+6u+13}{8u}\,du$$

$$= \int \left(\frac{u}{8}+\frac{3}{4}+\frac{13}{8u}\right)du$$

$$= \frac{u^2}{16}+\frac{3u}{4}+\frac{13}{8}\ln|u|+C$$

$$= \frac{(2x-3)^2}{16}+\frac{3}{4}(2x-3)+\frac{13}{8}\ln|2x-3|+C$$

الآن لدينا الشكل العام لحـل التكـامل . إذن يمكـن إيجـاد التكـامل خلال حدود معينة للحصول على قيمة العددية .

$$\int_{1}^{5} \frac{x^2+1}{2x-3}\,dx = \left[\frac{(2x-3)^2}{16} + \frac{3}{4}(2x-3) + \frac{13}{8}\ln|2x-3| + C\right]_1^5$$

$$= \left[\frac{7^2}{16} + \frac{21}{4} + \frac{13}{8}\ln 7 + C\right] - \left[\frac{(-1)^2}{16} - \frac{3}{4} + \frac{13}{8}\ln 1 + C\right]$$

$$= 9 + \frac{13}{8}\ln 7$$

الفصل السابع

التكامل المحدود ، مساحات مستوية بالتكامل التكامل المعتل (الغير صحيح)

The Definite Integral, Plane Areas by Integration, Improper Integrals

فى هذا الفصل :

- ✔ **مجموع رايمان .**
- ✔ **التكامل المحدود .**
- ✔ **مساحات مسطحة بالتكامل .**
- ✔ **التكامل المعتل (الغير صحيح) .**
- ✔ **مسائل محلولة .**

• مجموع رايمان Riemann Sums

دع $a \leq x \leq b$ فترة فيها الدالة المعطاة f(x) متصلة . قسم الفترة إلى n من الفترات الفرعية $h_1, h_2, \ldots\ldots, h_n$ بوضع (n - 1) من النقط ξ_1 ، ξ_2 . . . . . ξ_{n-1} حيث إن $a < \xi_1 < \xi_2 < \ldots \xi_n < b$ ونربط a بالنقطة ξ_0 و b بالنقطة ξ_n . ونرمز إلى طول الفترة الفرعية h_1 . بالرمز $\Delta_1 x = \xi_1 - \xi_0$ بالرمز h_2 $\xi_2 - \xi_1$ = $\Delta_2 x$ ، . . . . . ، h_n بالقيمة $\Delta_n x = \xi_n - \xi_{n-1}$ (هذا موضح بالشكل 1-7 . الأطوال هى مسافات مباشرة كل منها موجب بالنظر إلى المتساويات السابقة) . فى كل فترة فرعية اختار نقطة x_1)

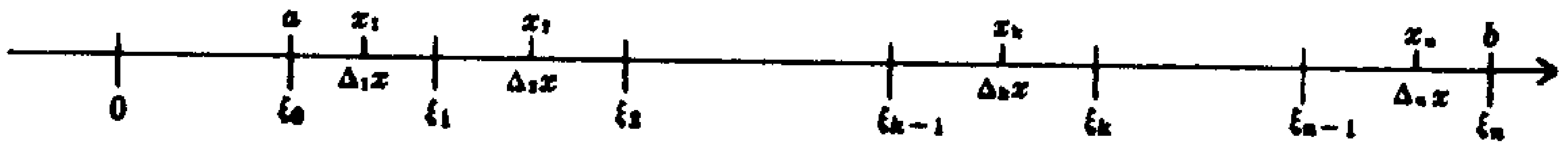
على الفترة الفرعيـة h_1 ، x_2 علـى h_2 ، . . . . ، x_n علـى h_n) ثـم كـون مجموع رايمان .

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x=f(x_1)\Delta_1 x+f(x_2)\Delta_2 x+\cdots+f(x_n)\Delta_n x \qquad (7\text{-}1)$$

كل حد هو حاصل ضرب طول الفترة الفرعية وقيمة الدالة عند النقطـة المختارة على الفترة الفرعية . نرمز بـالرمز h_n إلـى أطـول فـترة فرعيـة تظهر فى المعادلة (7-1) . الآن دع عدد الفترات الفرعية يـزداد بـدون حدود إلى أن تصل $\lambda_n \to 0$. (أحد الطرق لعمل ذلك بتصنيف كل مـن الفترات الفرعية الأصلية ثم تنصيف الفترات الناتجة وهكذا) . إذن

$$\lim_{n\to+\infty} S_n= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_n)\Delta_n x$$

يكون موجوداً وبالمثل لكل الطرق فى تفسيم الفترات $a \le x \le b$ إلـى أن نصل إلى $\lambda_n \to 0$ ولكل الاختيـارات للنقـط x_k علـى الفـترات الفرعيـة الناتجة .



شكل 7-1

• التكامل المحدود The Definite Integral

نظرية : النظرية الأساسية فى حساب التفـاضل والتكـامل هـى مسـاواة المشتقة العكسية مع مساحة تحت منحنى خلال الفترة [a, b] مثل :

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x$$

الرمز $\int_a^b f(x)dx$ يعرف بالتكامل المحدود للدالة f(x) بالنسبة إلى x من x = a إلـى x = b الدالـة f(x) تسـمى التكاملـة ، a ، b يسـميان علـى

الترتيب بالنهاية السفلية والعلوية للتكامل (حدود التكامل) هذه القاعدة تحقق العلاقة العكسية بين التفاضل والتكامل . أى أن F'(x) = f(x) خلال الفترة [a, b] ، إذن

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال 7-1 : (أ) خذ f(x) = c ، a ثابت ، F(x) = cx ، إذن

Example 7-1: (a) Take f(x) = c, a constant, and F(x) = cx; then

$$\int_a^b c\,dx = cx\Big|_a^b = c(b-a)$$

(ب) خذ f(x) = x و $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ ، إذن

(b) Take f(x) = x and $F(x) = \frac{1}{2}x^2$; then

$$\int_0^5 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^5 = \frac{25}{2} - 0 = \frac{25}{2}$$

لقد عرفنا $\int_a^b f(x)dx = 0$ عند a < b . الحالات الأخرى تؤخذ بالنسبة إلى التعريفات الآتية

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

لو a < b إذن $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Properties of Definite Integrals خواص التكامل المحدود

إذا كانت f(x) و g(x) دالتين متصلتين خلال فترة التكامل $a \le x \le b$ إذن

خاصية 7-1 :

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \quad \text{لأى ثابت } c$$

خاصية 2-7 :

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

خاصية 3-7 :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \text{ for } a < c < b$$

خاصية 4-7 : (نظرية القيمة المتوسطة الأولى)

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_o)$$

على الأقل يوجد قيمة واحدة $x = x_0$ بين b, a . وهى أيضًا يمكن تفسيرها كطريقة لحساب القيمة المتوسطة لدالة متصلة خلال الفترة $[a, b]$ وعادة نكتب على الشكل .

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

خاصية 5-7 :

إذا كان $F(u) = \int_a^u f(x)dx$ ، فإنه $\frac{d}{du}F(u) = f(u)$

نظرية بليز The Theorem of Bliss

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين متصلتين فى الفترة $a \le x \le b$ ، ولو قسمت الفترة إلى فترات فرعية كما سبق ولو اختيرت نقطتان فى كل فترة فرعية (أى أن x_k و X_k فى الفترة الفرعية رقم k) . إذن

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)g(X_k)\Delta_k x = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

نلاحظ أولاً أن النظرية حقيقية لو أن النقط x_k و X_k متماثلتان وقوة النظرية أنه عندما يتميز كل زوجين من النقط تكون النتيجة كما لو

كانت النقطتان منطبقتان على بعضهما .

لإيجاد التكامل المحدود مباشرة من التعريف ، أحيانًا نستخدم الصيغ التجميعية الآتية :

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

• مساحات مسطحة بالتكامل Plane Areas by Integration

المساحة كمجموع محدد Area as the Limit of a Sum

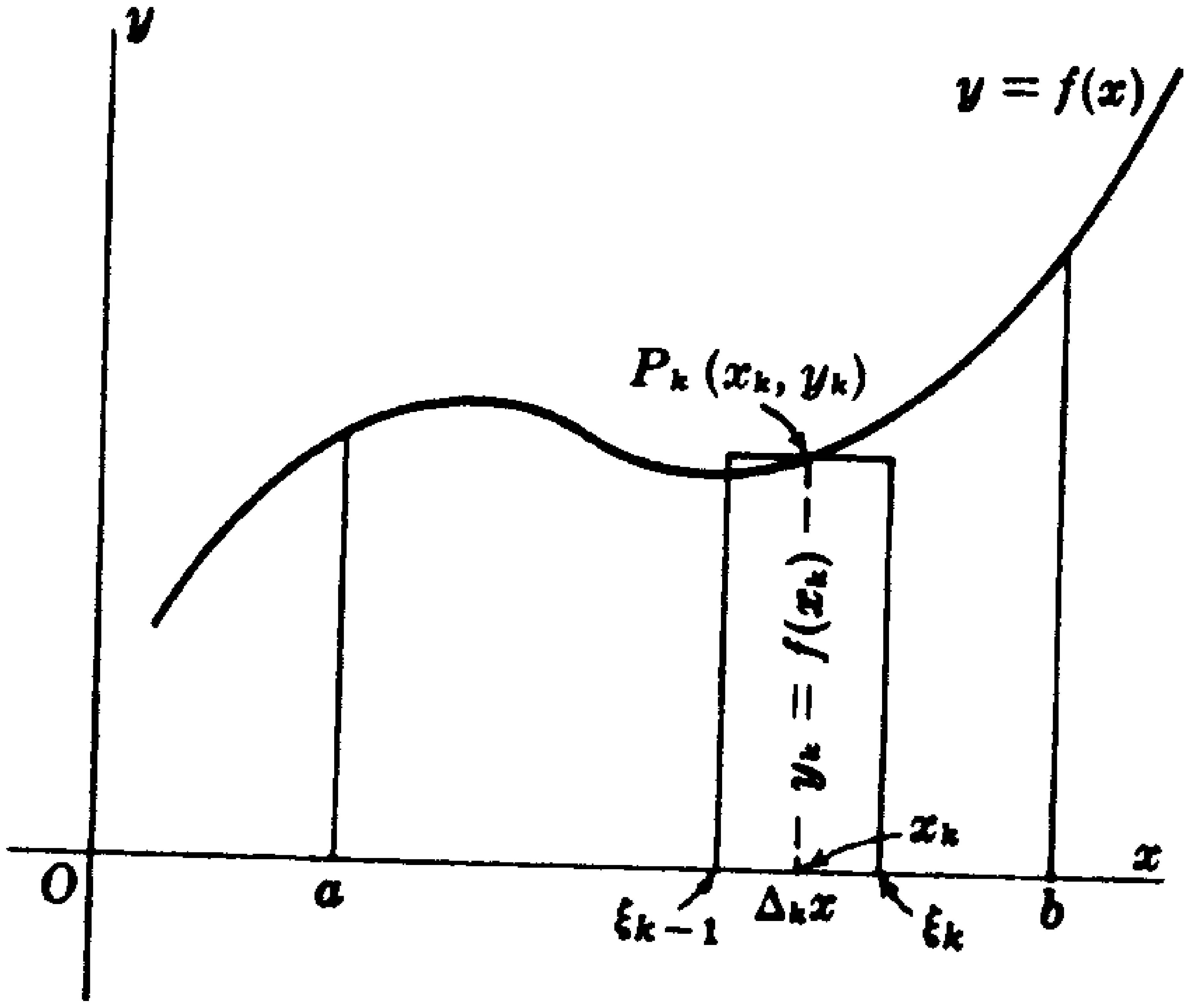
إذا كانت f(x) متصلة وغير سالبة فى الفترة $a \le x \le b$ ، النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل تسمح لنا لتعريف مجموع ريمان الغير محدود بواسطة التكامل المحدود .

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x$$

وهذا يعطى تفسير هندسى . دع الفترة $a \le x \le b$ تقسم إلى فترات فرعية والنقط x_k المختارة فى الجزء السابق . خلال كل نقط النهايات

$\xi_0 = a, \xi_1, \xi_2 \bullet \bullet \bullet, \xi_n = b$ ارسم أعمدة على محور x ومحصورة بين العمودين $x = a$ ، $x = b$. قرب كل شريحة على أنها مستطيل قاعدته هى قاعدة الشريحة السفلية وارتفاعه هو الإحداثى الرأسى المرسوم عند النقطة x_k للفترة الفرعية . المساحة للفترة K هى تقريبًا مستطيل . كما هو موضح بشكل 2-7 وهى

$f(x_k)\Delta_k x$ لذلك ، $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x$ هو ببساطة مجموع المساحات للمستطيلات n .



شكل 7-2

حدود المجموع هى $\int_a^b f(x)\,dx$ ، وهى أيضًا تعريف المساحة الموصوفة سابقًا أو أكثر تحديدًا المساحة تحت المنحنى من $x = a$ إلى $x = b$. بالمثل لو $x = g(y)$ متصلة وغير سالبة فى الفترة $c \le y \le b$. التكامل المحدود $\int_a^d g(y)\,dy$ هو تعريف المساحة المحددة بالمنحنى $x = g(y)$ ، محور y والخط الرأسى $y = c$ و $y = d$.

إذا كانت $y = f(x)$ متصلة وغير موجبة فى الفترة $a \le x \le b$ ، إذن $\int_a^b f(x)\,dx$ يكون سالب مشيرًا إلى المساحة التى على يسار محور y .

إذا كانت $x = g(y)$ متصلة وغير موجبة فى الفترة $c \le y \le d$ ، إذن $\int_a^d g(y)\,dy$

يكون سالب مشيرًا إلى المساحة التى على يسار محور y .

إذا كانت $y = f(x)$ تغير إشارتها فى الفترة $a \le x \le b$ أو لو $x = g(y)$ تغير إشارتها فى الفترة $c \le y \le d$ ، إذن المساحة التى تحت المنحنى تعطى بمجموع اثنين أو أكثر من التكامل المحدود .

المساحات بالتكامل Areas by Integration

الخطوات الآتية تبين وتعرف التكامل المحدود الذى يعين مساحة

1 ـ ارسم مخطط يبين المساحة المطلوبة موضحًا عدد k من الشرائح وقربها إلى مستطيلات ، ثم نبين الفترات الفرعية ذات طول Δx أو (Δy) مع نقطة x_k أو (y_k) على الفترات الفرعية كنقط متوسطة .

2 ـ اكتب مساحة المستطيل المقربة ومجموع المستطيلات n .

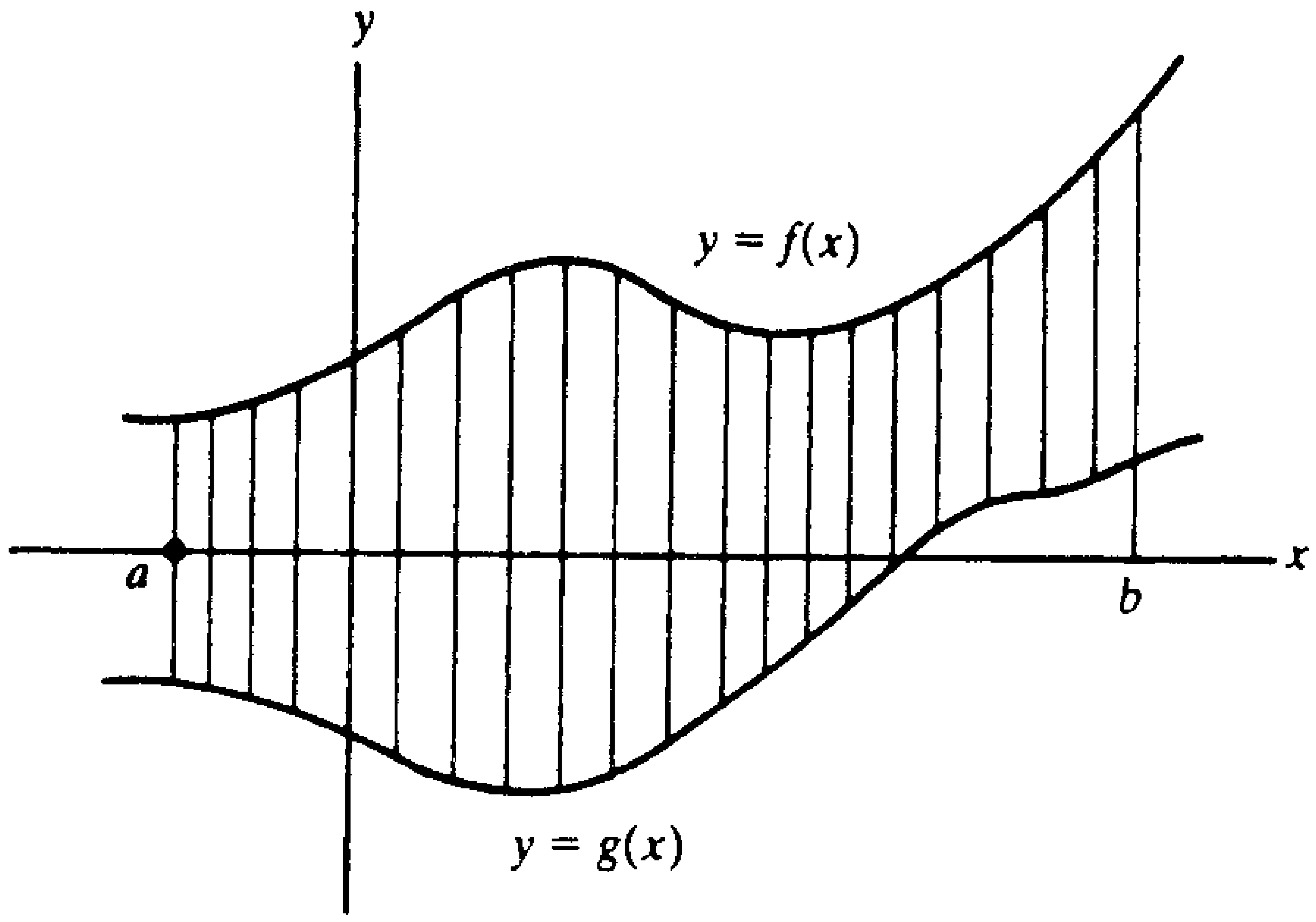
3 ـ افرض أن عدد المستطيلات يزداد بلا حدود وطبق النظرية الأساسية للجزء السابق .

المساحات بين المنحنيات Areas Between Curves

افرض أن $f(x)$ و $g(x)$ دالتان متصلتان حيث إن $0 \le g(x) \le f(x)$ للفترة $a \le x \le b$. إذن المساحة A للمنطقة R المحصورة بين المنحنى $y = f(x)$ و $y = g(x)$ وبين $x = a$ و $x = b$ (انظر شكل 3-7) معطاة كالآتى :

$$A=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

أى أن المساحة A هى الفرق بين المساحة $\int_a^b f(x)\,dx$ للمنطقة فوق محور x وتحت $y = f(x)$ والمساحة $\int_a^b g(x)\,dx$ للمنقطة فوق محور x وتحت $y = g(x)$.



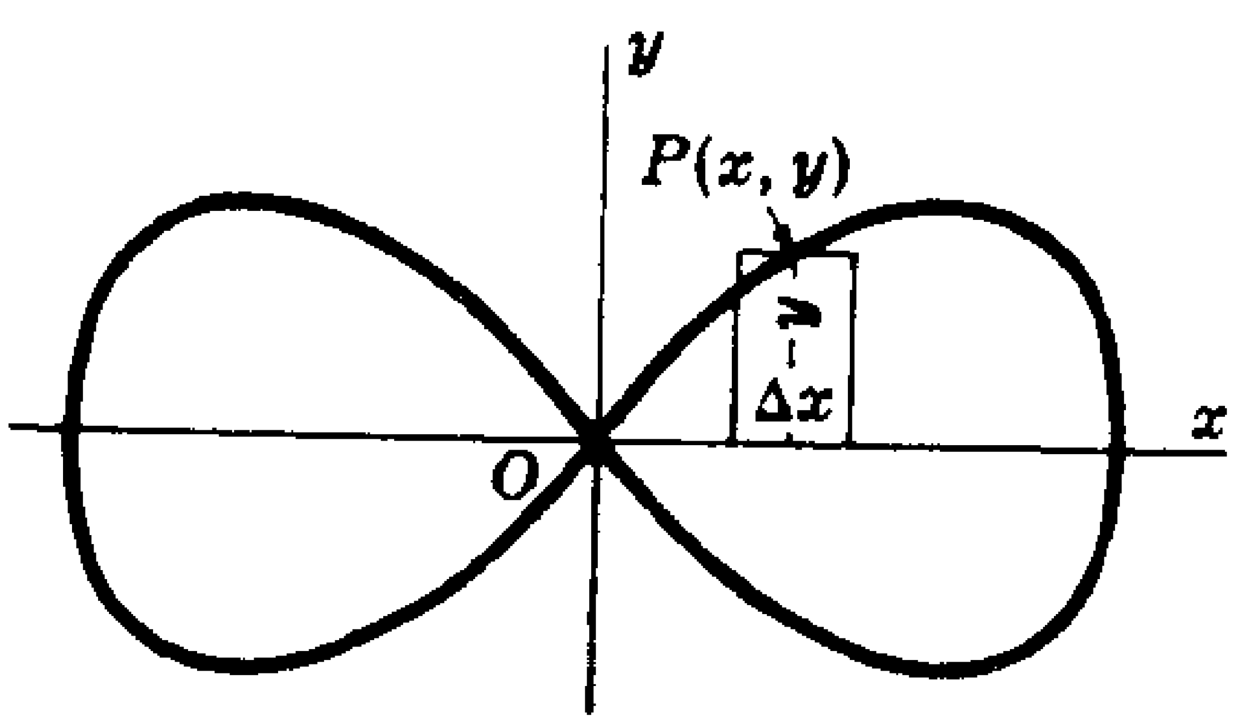
شكل 7-3

مثال 7-2 : أوجد المساحة داخل المنحنى $y^2 = x^2 - x^4$.

Example 7-2: Find the area enclosed by the curve $y^2 = x^2 - x^4$.

المنحنى متماثل بالنسبة إلى المحاور . لذلك المساحة المطلوبة تكون أربع مرات من المساحة فى الربع الأول للمستطيل التقريبى شكل 7-4 . العرض هو Δx والارتفاع $y = \sqrt{x^2 - x^4} = x\sqrt{1 - x^2}$ والمساحة هى $x\sqrt{1 - x^2}\Delta x$ لذلك المسحة المطلوبة هى :

$$A = 4\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\,dx = \left[-\frac{4}{3}(1 - x^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$ وحدة مربعة



شكل 7-4

• التكامل المعتل (الغير صحيح) Improper Integrals

التكامل المحدود $\int_a^b f(x)\,dx$ يسمى بالتكامل المعتل لو أن :

1 ـ التكاملة $f(x)$ لها نقطة واحدة أو أكثر غير متصلة في الفترة $a \le x \le b$. أو

2 ـ على الأقل أحد النهايات (الحدود) للتكامل تكون غير محدودة .

التكاملة الغير متصلة (المنفصلة) Discontinuous Integrand

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة في الفترة $a \le x \le b$ لكن غير متصلة عند $x = b$

نعرف . $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ يعطى النهايات الموجودة

(يمكن كتابته $\lim_{\beta \to b} \int_a^{\beta} f(x)dx$) .

لو $f(x)$ متصلة في الفترة $a \le x \le b$ ولكن غير متصلة عند $x = a$

نعرف $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ والتي أيضًا يمكن إيجادها في هذا

الشكل $\lim_{\alpha \to a} \int_{\alpha}^{b} f(x)dx$.

إذا كانت $f(x)$ مستمرة لكل قيم x في الفترة $a \le x \le b$ ماعدا عند $x = c$

حيث $a < c < b$ نعرف

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)dx$$

تعطى كلا النهايتين لها وجود .

مثال 7-3 : بين أن $\int_0^2 \frac{dx}{2-x}$ لا يعنى شىء .

Example 7-3: Show that $\int_0^2 \frac{dx}{2-x}$ is meaningless.

التكاملة غير متصلة عند $x = 2$. نعتبر

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{2-x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\ln\frac{1}{2-x}\right]_0^{2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon} - \ln\frac{1}{2}\right)$$

النهايات غير موجودة ، لذلك هذا التكامل ليس له معنى .

Infinite Limits of Integration النهايات الغير محدودة بالتكامل

إذا كانت $f(x)$ فى كل الفترة $a \le x \le U$ ، تعرف

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{U\to+\infty}\int_a^U f(x)dx$$ تعطى نهايات موجودة .

إذا كانت $f(x)$ متصلة فى الفترة $u \le x \le b$ ، نعرف

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{u\to-\infty}\int_u^b f(x)dx$$ تعطى نهايات موجودة .

إذا كانت $f(x)$ متصلة نعرف

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{U\to+\infty}\int_a^U f(x)dx + \lim_{u\to-\infty}\int_u^a f(x)dx$$

تعطى كلاهما نهايات موجودة .

مثال 7-4 : أوجد $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$

Example 7-4: Find $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$

الحد العلوى للتكامل غير محدد . نعتبر

$$\lim_{U\to+\infty}\int_0^U \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{U\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}x\right]_0^U = \frac{\pi}{4}$$

ومن هنا

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4} = \frac{\pi}{4}$$

• مسائل محلولة Solves Problems

مسألة محلولة 7-1 : معطى المنطقة المحصورة بـالمنحنى $y = x^2$ والخط $y = -\frac{1}{2}x$ والخط $x = 3$. أوجد مساحة المنطقة .

solved problem 7-1: Given the region bounded by the curve $y = x^2$, and the line $y = -\frac{1}{2}x$, and the line $x = 3$, find the area of the region.

الحل : المساحة بين منحنيين يمكن إيجادها بواسطة

$$\text{المساحة} = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$

بينما فى هذه الحالة $f(x) = x^2$ و $g(x) = -\frac{1}{2}x$. لذلك مساحة هذه المنطقة هى

$$\text{المساحة} = \int_0^3\left[x^2-\left(-\frac{1}{2}x\right)\right]dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right)_0^3$$

$$= \left[\frac{3^3}{3}+\frac{3^2}{4}\right]-\left[\frac{0^3}{3}+\frac{0^2}{4}\right]$$

$$= \frac{27}{3}+\frac{9}{4}$$

$$= \frac{135}{12}$$

$$= 11.25$$

ملحق (أ)

صيغ التفاضل للدوال الرياضية المعروفة

Differentiation Formulas For Common Mathematical Functions

Polynomial Functions دوال متعددة الحدود

$$\frac{d}{dx}(a_o x^n) = n\, a_o x^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(a_o u^n) = n\, a_o u^{n-1} \left[\frac{du}{dx}\right]$$

Trigonometric Functions دوال دائرية

$$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \left[\frac{du}{dx}\right]$$

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \left[\frac{du}{dx}\right]$$

$$\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \left[\frac{du}{dx}\right]$$

$$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \left[\frac{du}{dx}\right]$$

$$\frac{d}{dx}(\sec u) = -\sec u \tan u \left[\frac{du}{dx}\right]$$

$$\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u \left[\frac{du}{dx}\right]$$

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a$$

Exponential Functions دوال أسية

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \left[\frac{du}{dx}\right]$$

Logarithmic Functions دوال لوغاريتمية

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{\log_a e}{u}\left[\frac{du}{dx}\right], \quad a \neq 0, 1$$

ملحق (ب)

صيغ التكامل للدوال الرياضية المعروفة

Integration Formulas For Common Mathematical Functions

Polynomial Functions دوال متعددة الحدود

$$\int u^p du = \frac{u^{p+1}}{p+1}, \quad p \neq 1$$

$$\int u^{-1} du = \int \frac{du}{u} = \ln u$$

Trigonometric Functions دوال دائرية

$$\int \sin u \, du = -\cos u$$

$$\int \cos u \, du = \sin u$$

$$\int \tan u \, du = -\ln \cos u$$

$$\int \cot u \, du = \ln \sin u$$

$$\int \sec u \, du = \ln(\sec u + \tan u)$$

$$\int \csc u \, du = \ln(\csc u - \cot u)$$

Exponential Functions دوال أسية

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a}, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\int e^u du = e^u$$

Logarithmic Functions دوال لوغاريتمية

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x$$

INDEX قائمة المصطلحات

Angle of intersection زاوية التقاطع
Antiderivative تفاضل عكسى
Approximations التقريب
differentials تفاضلة
root of equations جذور المعادلة
Asymptote الخطوط المقاربة
Average rate of change
متوسط معدل التغير
Chain rule قاعدة التسلسل
Composite function دالة مركبة
Concavity التقعر
Continuity الاتصال
Critical points النقاط الحرجة
Critical values القيم الحرجة
Curve sketching رسم المنحنيات
Decreasing functions دوال تناقصية
Definite integrals تكامل محدود
Degree of polynomial
درجة متعددة الحدود
Dependent variable متغير غير مستقل
Derivative of higher order
مشتقة الدرجة الأعلى
Differentials التفاضل
approximations
التقارب بالتفاضل
Differentiation التفاضل
chain rule قاعدة التسلسل
derivative المشتقة
formulas الصيغ
higher derivative الاشتقاق الأعلى
increment التزايد
implicit function الدوال الضمنية
inverse trigonometric
الدوال المثلثية العكسية
inverse functions الدوال العكسية
logarithmic اللوغاريتمى
rate of change معدل التغير
rules قواعد
special functions دوال خاصة
trigonometric functions دوال مثلثية
Discontinuity غير متصلة
Distinct linear factors
معامل خطى واضح
Distinct quadratic factors
معامل تربيعى واضح
Domain مجال
Exponential functions دوال أسية
Extended law of mean قانون المتوسط
Extent الامتداد
Factors المعاملات
distinct linear خطى واضح
distinct quadratic تربيعى واضح
repeated linear خطية متكررة
repeated quadratic تربيعية متكررة
First derivative المشتقة الأولى
test اختبار

Formulas	صيغ
differentiation	تفاضلية
integration	تكامل
reduction	اختصار
Fractions	كسور
partial	جزئى
rational	نسبى
Function	دالة
composite	مركبة
continuity	متصلة
decreasing	تناقصية
discontinuity	غير متصلة
domain	مجال
exponential	أسية
first derivative test	اختبار التفاضل الأول
graph	رسم
hyperbolic	دوال زائدية
increasing	متتابعة لا نهائية
infinite sequence	عكسية
inverse	زائدية عكسية
inverse hyperbolic	دائرية عكسية
inverse trigonometric	نهاية
limit	لوغاريتمى
range	مدى
relative max/min values	قيم قصوى ودنيا نسبية
second derivative test	اختبار التفاضل الثانى
special	خاصة
trigonometric	دائرية
variable	متغير
Fundamental theorem of calculus	النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل
General term	الحد العام (متتابعة)
Generalized law of mean	قانون المتوسط العام
Higher derivatives	مشتقة أعلى
Horizontal extent	امتداد أفقى
Hyperbolic functions	دوال زائدية
Implicit differentiation	تفاضل ضمنى
Improper	غير صحيح (معتل)
Improper integrals	تكامل معتل
Increasing functions	دوال تزايدية
Increment	تزايد
Indefinite derivative	تفاضل مطلق
Indefinite integrals	تكامل مطلق
Independent variable	متغير مستقل
Indeterminate forms	كمية غير معينة
Indeterminate types	أنواع غير معينة
Infinite limits of integration	النهايات الغير محدودة للتكامل
Infinite sequence	متتابعة لا نهائية
Inspection	فحص
Integrals	تكاملات
definite	محدد
indefinite	مطلق (غير محدد)

improper معتل (غير صحيح)
Integrand التكاملية
discontinuous غير متصلة
Integration تكامل
formulas صيغ
hyperbolic functions دوال زائدية
infinite limits نهايات غير محدودة
inspection فحص
parts أجزاء
partials fractions كسور جزئية
pane areas مساحات مسطحة
Intercept النقط المحصورة
Intermediate value theorem
نظرية القيمة المتوسطة
Isolated point نقطة معزولة
Instantaneous rate of change
معدل التغير اللحظى
Inverse functions دوال عكسية
hyperbolic زائدية
trigonometric لوغاريتمية
Law of mean قانون المتوسط
L'Hospital's rule قاعدة هوسبيتال
Limit نهاية
function دالة
left أيسر
right أيمن
sequence متتابعة
theorems نظريات
Linear factors معامل خطى

Logorithmic differentiation
تفاضل لوغاريتمى
Logorithmic functions
دوال لوغاريتمية
Maxima الأقصى
Maximum and minimum points
نقاط الحد الأقصى والحد الأدنى
Minima الأدنى
Nth term (sequence الحد النونى
Natural logorithem لوغاريتم طبيعى
Normals عادى
Partial fractions كسور جزئية
Parts, integration
أجزاء بواسطة التكامل
Plane areas by integration
مساحة مسطحة بالتكامل
Points of inflection نقط انقلاب
Principal branch الفرع الأساسى
Proper صحيح
Properties of definite integrals
خصائص التكامل المحدود
Quadratic factors معاملات تربيعية
Radial measure قياس بالتقدير الدائرى
Range مدى
Rate of change معدل التغير
Rational fraction كسور جزئية
Reduction formulas صيغ مختصرة
Reimann sums مجموع رايمان
Relative values قيم نسبية

Removable discontinuity
عدم اتصال قابل للنقل
Repeated linear factors
معاملات خطية متكررة
Repeated quadratic factors
معاملات تربيعية متكررة
Roll's theorem نظرية رول
Roots of equations جذور المعادلة
Rules قواعد
    chain التسلسل
    differentiation تفاضل
    L'Hospital's هوسبيتال
Second derivative المشتقة الثانية
    test اختبار
Sequence متتابعة
    general term الحد العام
    infinite مطلق
    limit نهاية
    nth term الحد النونى
Substitution تعويض
Symmetry تماثل
Tangents مماسات
Theorem of Bliss نظرية بليز
Theorems نظريات
    Bliss بليز
    continuous functions دوال متصلة
    أساسيات حساب التفاضل والتكامل
    fundamental of calculus
    intermediate value
    القيمة المتوسطة
    Roll's رولز
Third derivative المشتقة الثالثة
Trigonometry هندسيًا
    functions دوال
    integrals تكامل
    substitutions تعويض
Upper and lower limits
الحدود العليا والحدود الدنيا
Variables متغيرات
Vertical extent امتداد رأسى